

**Nennspannungsunabhängige Lebensdauervorhersage
auf der Grundlage linear elastischer
Finite-Elemente-Methode Berechnungen**

Von der Fakultät für Verkehrs- und Maschinensysteme
der Technischen Universität Berlin
zur Verleihung des akademischen Grades eines
Doktor der Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.)
genehmigte Dissertation

von
Dipl.-Ing. Christian Mourier
aus Hamburg

Berlin, 2002
D 83

Promotionsausschuß:

Vorsitzender: Prof. Dr.-Ing. D. Severin

Berichter: Prof. Dr.-Ing. H. Mertens

Prof. Dipl.-Ing. A. Zander

Tag der wissenschaftlichen Aussprache: 09. August 2001

Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Maschinenkonstruktion - Fachgebiet Konstruktionslehre der Technischen Universität Berlin und in der Zeit, in der ich in der Konstruktionsabteilung der MAN Turbomaschinen AG GHH BORSIG beschäftigt war. Für die Förderung des Forschungsvorhabens bin ich der Deutschen Forschungsgemeinschaft DFG zu Dank verpflichtet.

Meinem Doktorvater Herrn Professor Dr.-Ing. H. Mertens gilt mein besonderer Dank. Durch viele Gespräche und Anregungen hat er mich nicht nur während meiner Tätigkeit am Institut, sondern auch danach stets gefördert und damit wesentlich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen.

Herrn Prof. Dipl.-Ing. A. Zander danke ich für das entgegengebrachte Interesse und die kritische Durchsicht dieser Arbeit sowie Herrn Prof. Dr.-Ing. D. Severin für die Übernahme des Vorsitzes im Promotionsausschuß.

Für die gute Zusammenarbeit, die anregenden Diskussionen und die Unterstützung bei meiner Tätigkeit im Fachgebiet möchte ich mich bei den Mitarbeitern des Fachgebiets herzlich bedanken. Mein Dank gilt auch den Studenten, die im Rahmen von Studien- und Diplomarbeiten zu meiner Arbeit beigetragen haben.

Nicht zuletzt danke ich meiner inzwischen großen Familie. Meine Frau Angelika hat mich durch Diskussionen und Korrekturlesen tatkräftig unterstützt. Unsere vier Söhne Leonard, Felix, Andreas und Tobias haben mir immer wieder Kraft zur Vollendung dieser Arbeit gegeben.

Berlin, im April 2002

Christian Mourier

Inhaltsverzeichnis

| | |
|-----------------------|----|
| Abbildungsverzeichnis | XI |
|-----------------------|----|

| | |
|---------------------|-----|
| Tabellenverzeichnis | XIV |
|---------------------|-----|

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Einleitung | 1 |
| 1.1 | Einführung | 1 |
| 1.2 | Ziel der Arbeit | 2 |
| 2 | Grundlagen der Lebensdauerbewertung | 4 |
| 2.1 | Werkstoffmodell bei homogener Beanspruchung | 4 |
| 2.1.1 | Dauerfestigkeit einachsig belasteter ungekerbter Probe- stäbe | 4 |
| 2.1.2 | Zeitfestigkeit einachsig belasteter ungekerbter Probestä- be | 7 |
| 2.1.2.1 | Spannungs- und Dehnungs-Wöhlerlinien | 8 |
| 2.1.2.2 | Zyklische Spannungs-Dehnungskurve | 9 |
| 2.1.2.3 | Berücksichtigung des Mittelspannungseinflus- ses | 10 |
| 2.1.3 | Festigkeitshypothesen bei mehrachsiger Beanspruchung | 12 |
| 2.2 | Werkstoffmodell bei inhomogener Beanspruchung | 20 |
| 2.2.1 | Stützwirkungskonzepte | 22 |
| 2.2.1.1 | Mikrostützwirkung | 23 |
| 2.2.1.2 | Makrostützwirkung | 26 |
| 2.2.2 | Fertigungseinflüsse | 30 |
| 3 | Erweiterung der Drei-Invarianten-Hypothese | 32 |
| 3.1 | Invarianten phasenverschobener Spannungen | 33 |
| 3.2 | Vergleichsspannungs-Amplitude | 37 |
| 3.2.1 | Einfrequente Beanspruchung | 37 |
| 3.2.2 | Mehrfrequente Beanspruchung | 39 |
| 3.3 | Stützwirkungskonzepte | 44 |
| 3.3.1 | Mikrostützwirkung | 45 |
| 3.3.2 | Makrostützwirkung | 66 |
| 3.3.2.1 | Unteres Niveau der modifizierten <i>Neuber</i> -Hy- perbel | 67 |
| 3.3.2.2 | Fließbehinderung an Kerben | 73 |
| 3.4 | Vergleichsmittelspannung | 78 |
| 3.5 | Lebensdauer-Bewertungskonzept | 79 |
| 3.6 | Abschätzformeln benötigter Kennwerte | 82 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 4 | Validierung der Hypothese | 87 |
| 4.1 | Ungekerbte Bauteile | 87 |
| 4.1.1 | Dauerfestigkeit ungekerbter Bauteile | 87 |
| 4.1.2 | Zeitfestigkeit ungekerbter Bauteile | 98 |
| 4.2 | Gekerbte Bauteile | 101 |
| 4.2.1 | Spannungs-Wöhlerlinien | 101 |
| 4.2.2 | Nachrechnung von Versuchsergebnissen | 120 |
| 5 | Zusammenfassung und Ausblick | 126 |
| A | Ergänzungen zur Drei-Invarianten-Hypothese | 129 |
| A.1 | Invarianten | 129 |
| A.2 | Abstandsfunktion für synchrone mehrfrequente Beanspruchungen | 132 |
| B | Diagramme der Fließbehinderung φ | 137 |
| B.1 | Diagramme für konstante Durchmesserhältnisse | 139 |
| B.2 | Diagramme für konstante Kerbtiefe | 148 |
| C | Tabellarische Zusammenstellung von Mikrostützziffern | 154 |
| D | Beispiele der Bauteilelementierung | 164 |
| E | Dauerfestigkeits-Hypothesen | 170 |
| E.1 | Schubspannungs-Intensitäts-Hypothese | 170 |
| E.2 | Quadratische Versagens-Hypothese | 172 |
| | Nomenklatur | 173 |
| | Literaturverzeichnis | 182 |

Abbildungsverzeichnis

| | |
|--|----|
| Abbildung 2.1: Schwingbelastung für ein Spannungsverhältnis R . | 5 |
| Abbildung 2.2: <i>Haigh</i> -Schaubild nach Gl.(2.3) für verschiedene Parameterwerte b | 6 |
| Abbildung 2.3: <i>Haigh</i> -Schaubild für verschiedene Mittelspannungsempfindlichkeiten M | 7 |
| Abbildung 2.4: Dehnung-Wöhlerlinien für eine wechselnde Beanspruchung | 8 |
| Abbildung 2.5: Dreiachsiger Spannungszustand an einem infinitesimalen rechtwinkligen Volumenelement | 13 |
| Abbildung 2.6: Dreiachsiger Spannungszustand an einer beliebig gedrehten Schnittfläche | 14 |
| Abbildung 2.7: Mehrachsiger Spannungszustand für einen gekerbten Rundstab | 21 |
| Abbildung 2.8: Bezogenes Anstrengungsgefälle χ | 24 |
| Abbildung 2.9: Bezogenes Anstrengungsgefälle χ_0 aus der Belastung und χ aus der Belastung und der Kerbe, entnommen links [67] und rechts [61] (χ entspricht \bar{G}) | 25 |
| Abbildung 2.10: Modifizierte <i>Neuber</i> -Hyperbel unter Berücksichtigung der Fließbehinderung φ | 29 |
| Abbildung 3.1: Verlauf der bezogenen Invarianten \hat{I}_1 , \hat{I}_2 und \hat{I}_3 für einen axialbelasteten Rundstab mit Umlaufkerbe | 48 |
| Abbildung 3.2: Definition des Volumenintegrals | 55 |
| Abbildung 3.3: Vergleich der Mikrostützziffern $n_{V,mod.Mises}$ und $n_{H,Mises}$ für verschiedene Werkstoffstrukturlängen ρ^* und Kerbradien ρ bei konstanten Durchmessern $d = 8mm$ und $D = 16mm$ | 58 |
| Abbildung 3.4: Vergleich der Mikrostützziffern $n_{V,mod.Mises}$ und $n_{H,Mises}$ für geometrisch ähnliche Rundstäbe unter Zugbelastung bei einer Werkstoffstrukturlänge $\rho^* = 0,17mm$ | 59 |
| Abbildung 3.5: Vergleich der Mikrostützziffern $n_{V,mod.Mises}$ und $n_{H,Mises}$ für verschiedene Bauteildurchmesser d , D und Kerbradien ρ bei einer konstanten Werkstoffstrukturlänge $\rho^* = 0,1mm$ | 59 |
| Abbildung 3.6: Auf den Maximalwert bezogener Verlauf der zweiten Invariante für einen gekerbten und einen abgesetzten Rundstab unter Torsionsbelastung ($\rho = 0,25mm$, $d = 13,5mm$ und $D = 14mm$) | 62 |

| | |
|---|----|
| Abbildung 3.7: Vergleich experimenteller [32] und gerechneter zyklischer Fließkurven für den Werkstoff 42CrMo4V | 69 |
| Abbildung 3.8: Vergleich experimenteller [26] und gerechneter Fließkurven eines niederfesten Stahls | 69 |
| Abbildung 3.9: Einfluß des unteren Niveaus der modifizierten <i>Neuber</i> -Hyperbel auf die ertragbare Lastwechselzahl für einen zugbelasteten Rundstab mit Umdrehungskerbe und Versuchsergebnisse von <i>Liebrich</i> [34] | 70 |
| Abbildung 3.10: Einfluß des unteren Niveaus der modifizierten <i>Neuber</i> -Hyperbel auf die ertragbare Lastwechselzahl für einen gekerbten, biegebelasteten Rundstab und Versuchsergebnisse von <i>Pötter</i> und <i>Zenner</i> [50] | 71 |
| Abbildung 3.11: Einfluß des unteren Niveaus der modifizierten <i>Neuber</i> -Hyperbel auf die ertragbare Lastwechselzahl für einen torsionsbelasteten Rundstab mit Umdrehungskerbe und Versuchsergebnisse von <i>Pötter</i> und <i>Zenner</i> [50] | 72 |
| Abbildung 3.12: Berechnete globale Fließbehinderungen φ_{global} mit und ohne Berücksichtigung von Gl.(3.82) und Versuchsergebnisse von <i>Dietmann</i> [7] aufgetragen über dem bezogenen Spannungsgradienten χ | 74 |
| Abbildung 3.13: Einfluß des festigkeitssteigernden Effekts der Mehrachsigkeit und Versuchsergebnisse von <i>Liebrich</i> [34] | 75 |
| Abbildung 3.14: Schematische Vorgehensweise zur Lebensdauerbewertung beginnend bei den Eingangsgrößen bis zu den von der Lastwechselzahl abhängigen Größen | 80 |
| Abbildung 3.15: Schematische Vorgehensweise zur Lebensdauerbewertung für die von der Lastwechselzahl abhängigen Größen | 81 |
| Abbildung 3.16: Bestimmung der Geometrieparameter a und b für gekerbte bzw. abgesetzte Rund- und Flachstäbe | 86 |
| Abbildung 4.1: Einfluß des Frequenzverhältnisses bei einer wechselnden Normal- und einer wechselnden Schubspannung mit $\delta_{xy} = 0^\circ$ und Versuchsergebnissen von <i>Mielke</i> [44] und <i>Kaniut</i> [29] | 88 |
| Abbildung 4.2: Einfluß der Phasenverschiebung δ_{yy} bei zwei schwelenden Normalspannungen mit dreieckiger Schwingungsform und Versuchsergebnissen von <i>Bhonghibhat</i> [3] | 90 |
| Abbildung 4.3: Einfluß der Phasenverschiebung δ_{yy} bei zwei sinusförmig schwelenden Normalspannungen für unterschiedliche Werkstoffkennwerte τ_W und Versuchsergebnisse von <i>Bhonghibhat</i> [3] | 91 |

| | |
|--|-----|
| Abbildung 4.4: Einfluß der Phasenverschiebung δ_{yy} bei zwei schwellenden Normalspannungen mit trapezförmiger Schwingungsform und Versuchsergebnissen von <i>Bhongbhibhat</i> [3] | 93 |
| Abbildung 4.5: Einfluß der Phasenverschiebung δ_{yy} für eine trapezförmige Last-Zeit-Funktion berechnet in unterschiedlichen Koordinatensystemen und Versuchsergebnisse von <i>Bhongbhibhat</i> [3] | 94 |
| Abbildung 4.6: Einfluß der Phasenverschiebung δ_{xy} bei einer wechselnden Normal- und einer wechselnden Schubspannung mit sinusförmiger Schwingungsform und Versuchsergebnissen von <i>Heidenreich</i> u.a. [27] | 96 |
| Abbildung 4.7: Einfluß der Phasenverschiebung δ_{xy} bei einer wechselnden Normal- und einer wechselnden Schubspannung mit trapezförmiger Schwingungsform und Versuchsergebnissen von <i>Heidenreich</i> u.a. [27] | 97 |
| Abbildung 4.8: Vergleich von berechneten Wöhlerlinien mit Versuchsergebnissen von <i>Sonsino</i> [60] für einen glatten Hohlstab unter überlagerter Zug- und Torsionsbelastung bei 0° Phasenverschiebung | 99 |
| Abbildung 4.9: Vergleich von berechneten Wöhlerlinien mit Versuchsergebnissen von <i>Sonsino</i> [60] für einen glatten Hohlstab unter überlagerter Zug- und Torsionsbelastung bei 90° Phasenverschiebung | 100 |
| Abbildung 4.10: Vergleich von berechneten Wöhlerlinien mit Versuchsergebnissen von <i>Haibach</i> und <i>Matschke</i> [24] für einen glatten und einen gekerbten Flachstab unter wechselnder Zug-Druckbelastung | 102 |
| Abbildung 4.11: Vergleich von berechneten Wöhlerlinien mit Versuchsergebnissen von <i>Liebrich</i> [34] für einen glatten und einen gekerbten Rundstab unter wechselnder Zug-Druckbelastung . . | 104 |
| Abbildung 4.12: Vergleich von berechneten Wöhlerlinien mit Versuchsergebnissen von <i>Liebrich</i> [34] für einen glatten und einen gekerbten Rundstab unter schwellender Zug-Druckbelastung . . | 105 |
| Abbildung 4.13: Vergleich von berechneten Wöhlerlinien mit Versuchsergebnissen von <i>Baier</i> [1] für einen gekerbten Rundstab unter Zugwechselbelastung mit überlagerter konstanter Zugmittellast | 108 |
| Abbildung 4.14: Vergleich von berechneten Wöhlerlinien mit Versuchsergebnissen von <i>Baier</i> [1] für einen gekerbten Rundstab unter Zugwechselbelastung mit überlagerter konstanter Torsionsmittellast | 110 |

| | |
|--|-----|
| Abbildung 4.15: Vergleich von berechneten Wöhlerlinien mit Versuchsergebnissen von <i>Baier</i> [1] für einen gekerbten Rundstab unter schwellender Zugbelastung mit überlagerter konstanter Torsionsmittellast | 113 |
| Abbildung 4.16: Berechnete Mikrostützziffern $n_{2\sigma}$ bei unterschiedlichen Kerbspannungen $\hat{\sigma}_{xxa}$ für die Versuchsergebnisse von <i>Baier</i> [1] unter schwellender Zugbelastung mit überlagerter konstanter Torsionsmittellast | 114 |
| Abbildung 4.17: Vergleich von berechneten Wöhlerlinien mit Versuchsergebnissen von <i>Pötter</i> und <i>Zenner</i> [50] für einen gekerbten Rundstab unter wechselnder Biege- und Torsionsbelastung . . . | 115 |
| Abbildung 4.18: Vergleich von berechneten Wöhlerlinien mit Versuchsergebnissen von <i>Simburger</i> [57] für einen abgesetzten Rundstab unter überlagerter Biege- und Torsionsbelastung bei 0° Phasenverschiebung | 117 |
| Abbildung 4.19: Vergleich von berechneten Wöhlerlinien mit Versuchsergebnissen von <i>Simburger</i> [57] für einen abgesetzten Rundstab unter überlagerter Biege- und Torsionsbelastung bei 90° Phasenverschiebung | 118 |
| Abbildung 4.20: Vergleich der mit der DIH '2000 berechneten Wöhlerlinien bei 0° und 90° Phasenverschiebung | 119 |
| Abbildung 4.21: Vergleich der mit der DIH '95 berechneten Wöhlerlinien bei 0° und 90° Phasenverschiebung | 120 |
| Abbildung B.1: Bezogenes Anstrengungsgefälle χ_0 aus der Belastung und χ aus der Belastung und der Kerbe, entnommen [67] | 138 |
| Abbildung B.2: Fließbehinderung φ für ein festes Verhältnis $a=1,01$ und verschiedene Verhältnisse b | 139 |
| Abbildung B.3: Fließbehinderung φ für ein festes Verhältnis $a=1,05$ und verschiedene Verhältnisse b | 140 |
| Abbildung B.4: Fließbehinderung φ für ein festes Verhältnis $a=1,1$ und verschiedene Verhältnisse b | 141 |
| Abbildung B.5: Fließbehinderung φ für ein festes Verhältnis $a=1,2$ und verschiedene Verhältnisse b | 142 |
| Abbildung B.6: Fließbehinderung φ für ein festes Verhältnis $a=1,4$ und verschiedene Verhältnisse b | 143 |
| Abbildung B.7: Fließbehinderung φ für ein festes Verhältnis $a=1,5$ und verschiedene Verhältnisse b | 144 |
| Abbildung B.8: Fließbehinderung φ für ein festes Verhältnis $a=1,667$ und verschiedene Verhältnisse b | 145 |
| Abbildung B.9: Fließbehinderung φ für ein festes Verhältnis $a=2$ und verschiedene Verhältnisse b | 146 |

| | |
|---|-----|
| Abbildung B.10: Fließbehinderung φ für ein festes Verhältnis $a=3$ und verschiedene Verhältnisse b | 147 |
| Abbildung B.11: Fließbehinderung φ für ein festes Verhältnis $b=1$ und verschiedene Verhältnisse a | 148 |
| Abbildung B.12: Fließbehinderung φ für ein festes Verhältnis $b=2$ und verschiedene Verhältnisse a | 149 |
| Abbildung B.13: Fließbehinderung φ für ein festes Verhältnis $b=4$ und verschiedene Verhältnisse a | 150 |
| Abbildung B.14: Fließbehinderung φ für ein festes Verhältnis $b=10$ und verschiedene Verhältnisse a | 151 |
| Abbildung B.15: Fließbehinderung φ für ein festes Verhältnis $b=20$ und verschiedene Verhältnisse a | 152 |
| Abbildung B.16: Fließbehinderung φ für ein festes Verhältnis $b=50$ und verschiedene Verhältnisse a | 153 |
| Abbildung D.1: Bauteilelementierung eines Rundstabes mit der Geometrie nach <i>Pötter</i> und <i>Zenner</i> [50] | 165 |
| Abbildung D.2: Detailausschnitt der Bauteilelementierung eines Rundstabes mit der Geometrie nach <i>Pötter</i> und <i>Zenner</i> [50] . . | 166 |
| Abbildung D.3: Detailausschnitt der Bauteilelementierung am Punkt der höchsten Beanspruchung (Geometrie nach <i>Pötter</i> und <i>Zenner</i> [50]) | 167 |
| Abbildung D.4: Bauteilelementierung eines Rundstabes mit der Geometrie nach <i>Simburger</i> [57] | 168 |
| Abbildung D.5: Bauteilelementierung eines Rundstabes mit der Geometrie nach <i>Liebrich</i> [34] | 169 |

Tabellenverzeichnis

| | |
|---|-----|
| Tabelle 3.1: Mikrostützziffern der Invarianten \hat{I}_{1a} , \hat{I}_{2a} und der <i>von Mises</i> -Vergleichsspannung für verschiedene Kerbradien ρ berechnet mit Gl.(3.50), Gl.(3.51) und Gl.(3.57) | 51 |
| Tabelle 3.2: Vergleichsspannungs-Amplituden $\sigma_{G,va}$ nach Gl.(3.52) und $\sigma_{H,va}$ nach Gl.(3.58) für verschiedene Kerbradien ρ | 52 |
| Tabelle 3.3: Mikrostützziffern der Invarianten \hat{I}_{1a} , \hat{I}_{2a} und der modifizierten <i>von Mises</i> -Vergleichsspannung für verschiedene Kerbradien ρ berechnet mit Gl.(3.61 und 3.62) | 57 |
| Tabelle 3.4: Mikrostützziffern der Invarianten \hat{I}_1 , \hat{I}_2 und der modifizierten <i>von Mises</i> -Vergleichsspannung für verschiedene Belastungsarten, Stabformen und Kerbgeometrien berechnet mit Gl.(3.61 und 3.62) | 60 |
| Tabelle 3.5: Globale Fließbehinderung φ_{global} für verschiedene Stabformen, Kerbgeometrien und Belastungsarten | 75 |
| Tabelle 3.6: Globale Fließbehinderung φ_{global} für zusammengesetzte Belastungen an unterschiedlich gekerbten Rundstäben | 77 |
| Tabelle 4.1: Werte des unteren Niveaus der modifizierten <i>Neuber</i> -Hyperbel $\check{\sigma}_{o,mod.Mises}$ und der Fließbehinderung φ_o für verschiedene Kerbspannungsamplituden $\hat{\sigma}_{xxa}$ bei überlagerter konstanter Torsionsmittelspannung $\hat{\sigma}_{xym}$ | 111 |
| Tabelle 4.2: Iterative Bestimmung der ertragbaren Lastwechselzahl N | 123 |
| Tabelle 4.3: Iterative Bestimmung der ertragbaren Lastwechselzahl N | 125 |
| Tabelle C.1: Mikrostützziffern der Invarianten I_1 (Biegebeanspruchung) und I_2 (Torsionsbeanspruchung) für glatte Rundstäbe mit verschiedenen Durchmesser D und Werkstoffstrukturlängen ρ^* berechnet nach Gl.(3.61 und 3.62) | 154 |
| Tabelle C.2: Mikrostützziffern der Invarianten I_1 , I_2 und der <i>von Mises</i> - bzw. modifizierten <i>von Mises</i> -Vergleichsspannung für Rundstäbe mit Umlaufkerbe unter Zugbelastung | 155 |
| Tabelle C.3: Mikrostützziffer $n_{V,12a}$ eines Rundstabs mit Umlaufkerbe unter überlagerter Zug-Druck- und Torsionsbelastung für verschiedene Nennspannungsverhältnisse T/S , Werkstoffstrukturlängen ρ^* , Kerbradien ρ und Phasenverschiebungen δ_{xy} . . . | 159 |

| | |
|--|-----|
| Tabelle C.4: Mikrostützziffer $n_{V,12a}$ eines glatten Rundstabs unter überlagerter Zug-Druck-, Biege- und Torsionsbelastung für ein Nennspannungsverhältnis $T/S_{Biegung} = 1$ und eine Werkstoffstrukturlänge $\rho^* = 0,17mm$ sowie verschiedene Spannungsverhältnisse $S_{Zug}/S_{Biegung}$ und Phasenverschiebungen δ_{xy} und $\delta_{xx,Zug}$ | 160 |
| Tabelle C.5: Mikrostützziffer $n_{V,12a}$ eines gekerbten Rundstabs unter überlagerter Zug-Druck-, Biege- und Torsionsbelastung für ein Spannungsverhältnis $T/S_{Biegung} = 1$ und eine Werkstoffstrukturlänge $\rho^* = 0,20mm$ sowie verschiedene Spannungsverhältnisse $S_{Zug}/S_{Biegung}$ und Phasenverschiebungen δ_{xy} und $\delta_{xx,Zug}$ | 161 |
| Tabelle C.6: Mikrostützziffern eines gekerbten Rundstabs unter überlagerter Zug-Druck-, Biege- und Torsionsbelastung für eine Werkstoffstrukturlänge $\rho^* = 0,20mm$ sowie verschiedene Kerbradien, Spannungsverhältnisse und Phasenverschiebungen | 162 |
| Tabelle C.7: Mikrostützziffern eines gekerbten Rundstabs unter Zug-Druck-, Biege- und Torsionsbelastung für eine Werkstoffstrukturlänge $\rho^* = 0,20mm$ sowie verschiedene Kerbradien | 163 |

1 Einleitung

1.1 Einführung

Die Bedeutung schneller und zuverlässiger Lebensdauervorhersagen für metallische Bauteile nimmt immer mehr zu. Gründe hierfür sind beispielsweise die Forderungen nach

- verkürzten Liefer- und Produktentwicklungszeiten durch Einsparung von Versuchszeiten,
- Material- und Gewichtseinsparungen und
- Vorhersagen zur Nutzungsdauer von Produkten abhängig vom Anwendungsbereich.

Besonders für schwingende Beanspruchungen von Maschinenbauteilen, wie zum Beispiel von Wellen, Laufrädern, etc., sind zuverlässige Lebensdauervorhersagen aufgrund der Gefahr von Schwingbruch unerlässlich. In der Konstruktionspraxis stehen zwei unterschiedliche Methoden,

- *Nennspannungskonzepte* und
- *örtliche Konzepte*,

zur Lebensdauervorhersage zur Verfügung. Klassische Nennspannungskonzepte zeichnen sich dadurch aus, daß die Spannungsermittlung auf stark vereinfachten Annahmen beruht. Die schadensrelevanten Spannungsüberhöhungen an Kerben, Einspann- und Kontaktstellen werden im zulässigen Spannungswert berücksichtigt. Die Übertragung dieses zulässigen Spannungswertes auf ein anderes Bauteil hängt von der Ähnlichkeit ab. Sind die Bauteile ähnlich, ist die Vorhersagegüte der Lebensdauer sehr hoch. Anderenfalls müssen aufwendige Versuche durchgeführt werden, um den zulässigen Wert zu ermitteln.

Den neuesten Stand des technischen Regelwerkes auf dem Gebiet der Lebensdauervorhersage mit Nennspannungskonzepten bilden die DIN 743 [9] und die FKM-Richtlinie [19]. Die Anwendung dieser Konzepte auf eine umfangreiche Versuchsdatenmenge wird von *Mertens* und *Linke* in [43] dargestellt. Verglichen werden die beiden Regelwerke mit einem modifizierten Konzept von *Hahn* [21], das von *Mertens* und *Linke* [43] insbesondere im Bereich phasenverschobener Beanspruchungszustände zur Anwendung empfohlen wird, da es die höchste Vorhersagegüte bietet.

Die zweite Methode zur Lebensdauervorhersage sind die örtlichen Konzepte. Grundlage dieser Konzepte sind die i.d.R. elastisch bestimmten örtlichen Spannungen, die vielfach mit Finite-Elemente-Methode (FEM) Programmen berechnet werden. Sie berücksichtigen Spannungsumlagerungen aus Eigenspannungs-

und Betriebsbelastungszuständen. Eine zusammenfassende Darstellung derartiger Konzepte ist im FKM-Heft 139 [14] enthalten.

Zur Berechnung der im Kerbgrund tatsächlich auftretenden Spannungen und Dehnungen werden i.a. Näherungsbeziehungen verwendet, da elastisch-plastische FEM-Berechnungen sehr hohe Rechenzeiten erfordern. Die in [14] beschriebenen örtlichen Konzepte verwenden als Näherungsbeziehung entweder die klassische *Neuber*-Hyperbel oder eine Modifikation von *Seeger*. Eine Festigkeitssteigerung aufgrund lokaler Mehrachsigkeit (Fließbehinderung), wie sie bereits von *Ludwik* [36] bei Spannungs-Dehnungs-Messungen an glatten und unterschiedlich gekerbten Probestäben beobachtet wurde, wird nicht berücksichtigt. *Buxbaum* weist in [4] darauf hin, daß dieser festigkeitssteigernde Effekt auch bei schwingender Beanspruchung berücksichtigt werden sollte. Von *Mertens*, *Dittmann* und *Hahn* [40, 10, 21] wurde deshalb eine modifizierte *Neuber*-Hyperbel entwickelt und bei der Bestimmung der örtlichen Spannungen und Dehnungen der Effekt der sogenannten Fließbehinderung berücksichtigt.

Diese Spannungsumlagerungen erstrecken sich auf einen größeren Bauteilbereich und werden i.a. mit dem Begriff Makrostützwirkung bezeichnet. Daneben erfährt die elastizitätstheoretische Spannungsspitze unabhängig von der Belastungshöhe eine weitere Stützwirkung. Nach *Neuber* [47] sind die sogenannte Mikrostützwirkung, die nur einen kleinen Bauteilbereich erfaßt, und die Makrostützwirkung unabhängig voneinander und können gleichzeitig wirken. Zur Berücksichtigung der Mikrostützwirkung wurden zahlreiche Ansätze entwickelt [8, 21, 47, 61, 66].

Im FKM-Heft 189 [15] wird gezeigt, daß die Lebensdauervorhersagen nach dem örtlichen Konzept die Aussagegüte von Nennspannungskonzepten für experimentell bestimmte Wöhlerlinien nicht erreichen. Zur Verbesserung der Lebensdauervorhersage wurden modifizierte örtliche Schädigungsmodelle vorgeschlagen [16, 30, 31]. Gemeinsames Kennzeichen dieser Modelle ist, daß sie die Amplituden und Mittelspannungen bei der Bewertung nicht trennen. Von *Mertens* und seinen Mitarbeitern [40, 10, 21] wurde ein anderer Weg beschritten. Sie formulierten zur Bewertung mehrachsiger Beanspruchungszustände wie in der Konstruktionspraxis üblich eine einachsige Vergleichsspannungs-Amplitude und eine einachsige Vergleichsmittelspannung. Diese werden mit lastwechselzahlabhängigen *Haigh*- oder *Smith*-Schaubildern in eine rein wechselnde Belastung umgerechnet. Die Lebensdauervorhersage erfolgt dann anhand der Werkstoff-Wöhlerlinie.

1.2 Ziel der Arbeit

Ziel dieser Arbeit ist es, ein nennspannungsunabhängiges Konzept zur Lebensdauervorhersage für mehrachsige schwingbeanspruchte, metallische Bauteile so-

wohl im Dauer- als auch im Zeitfestigkeitsbereich zu entwickeln. Aufbauend auf den Ergebnissen von *Mertens* [39, 40], *Dittmann* [10] und *Hahn* [21] sollen damit auch komplizierte Bauteilgeometrien bewertet werden, für die keine Nennspannungen formuliert werden können. Der Übergang zu Nennspannungskonzepten ist aufzuzeigen.

Die örtlichen Beanspruchungen werden mit der Finite-Elemente-Methode linear elastisch berechnet. Zur Berücksichtigung der Spannungsumlagerung sind neue Stützwirkungskonzepte zu formulieren, in denen die spannungsmindernden Mikrostützziffern und Makrostützziffern sowie die verformungsbehindernden Mehrachsigeitszahlen entgegen der bisherigen Vorgehensweise ohne Bezug zu einer Nennspannung und geometrieabhängigen Größen definiert werden sollen. Mittelspannungsbehaftete Beanspruchungszustände sind wie in der Konstruktionspraxis üblich mit *Haigh*- oder *Smith*-Schaubildern zu bewerten. Für die bei der Berechnung benötigten Werkstoffkennwerte, die teilweise nicht vorliegen, sind Schätzformeln bereitzustellen.

Weiterhin ist die Bewertung von dreiachsigen Spannungszuständen, wie sie beispielsweise in Kontaktstellen auftreten, einzuarbeiten. Dafür sind die Invarianten der Drei-Invarianten-Hypothese (DIH) entsprechend zu entwickeln. Der mehrachsige Spannungszustand ist mit Hilfe von Invarianten auf eine einachsige Vergleichsspannungs-Zeitfunktion zu reduzieren, um das aus einachsigen Versuchen vorhandene Werkstoffwissen nutzen zu können.

Als Last-Zeitfunktion werden beliebige periodische Funktionen vorausgesetzt, womit die einzelnen Lasten zueinander phasenverschoben und mit unterschiedlichen Frequenzen schwingen können. Nicht weiter sollen stochastische Belastungen untersucht werden, die in den Bereich der Betriebsfestigkeitsuntersuchungen gehören, da sie den Rahmen dieser Arbeit sprengen würden.

2 Grundlagen der Lebensdauerbewertung

Die Lebensdauerbewertung im Dauer- und Zeitfestigkeitsbereich ist im wesentlichen abhängig von dem verwendeten Werkstoff, den Belastungsarten und deren Zeitverläufen und der Bauteilgeometrie. Das reine Werkstoffverhalten wird durch einzelne statische und dynamische Kennwerte wie beispielsweise die Zugfestigkeit R_m oder die Zug- Druck-Wechselfestigkeit σ_W charakterisiert.

Im allgemeinen werden die Kennwerte an kleinen nicht gekerbten Proben mit einer homogenen Beanspruchung ermittelt. Eine homogene Beanspruchung liegt dann vor, wenn die Spannungsverteilung über den gesamten Querschnitt gleichmäßig ist, wie beispielsweise für einen axial zugbelasteten Stab. Demgegenüber ist der aus den Belastungsarten Biegung bzw. Torsion hervorgerufene Spannungszustand bereits inhomogen, was dann eine Stützwirkung zur Folge haben kann. Unabhängig von der Belastungsart besitzen gekerbte Bauteile einen ausgeprägten inhomogenen Spannungszustand im Bereich der Kerbe.

Im Folgenden wird die Vorgehensweise zur Beurteilung des Werkstoffverhaltens bei homogener (**Kapitel 2.1**) und inhomogener (**Kapitel 2.2**) Beanspruchung beschrieben.

2.1 Werkstoffmodell bei homogener Beanspruchung

2.1.1 Dauerfestigkeit einachsiger belasteter ungekerbter Probestäbe

Für den Festigkeitsnachweis im Bereich der Dauerfestigkeit ist die Zug- oder Druckbeanspruchung eines ungekerbten Stabes die einfachste Form. Eine schwingende Beanspruchung setzt sich im allgemeinen aus einem schwingenden Anteil σ_a (Amplitude) und einem ruhenden Anteil σ_m (Mittelspannung) zusammen. Kennzeichnen läßt sie sich durch das sogenannte Spannungsverhältnis R

$$R = \frac{\sigma_u}{\sigma_o} = \frac{\sigma_m - \sigma_a}{\sigma_m + \sigma_a} , \quad (2.1)$$

das der Quotient aus Unter- und Oberspannung ist ($\sigma_u = \sigma_m - \sigma_a$ und $\sigma_o = \sigma_m + \sigma_a$).

Für Spannungsverhältnisse $R \neq -1$, also eine Beanspruchung mit einer Mittelspannung, kann sich diese mindernd auf die dauerfest vom Werkstoff er-

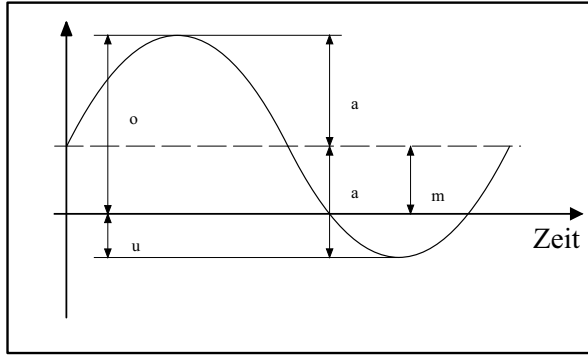


Abbildung 2.1: Schwingbelastung für ein Spannungsverhältnis R

tragbare Spannungsamplitude σ_A auswirken. Zur Darstellung dieses Einflusses wird das Schwingfestigkeitsschaubild nach *Haigh* verwendet. Den funktionalen Zusammenhang zwischen der Mittelspannung σ_m (oder einer Vergleichsmittelspannung σ_{vm}) und der ertragbaren Amplitude σ_A versucht man empirisch zu erfassen.

Die einfachste Form der Abhängigkeit ist die Beschreibung durch eine Gerade mit der negativen Steigung M , zu deren Bestimmung nach *Schütz* [53] lediglich der reine Wechselversuch ($R = -1$) und der Schwellversuch ($R = 0$) benötigt werden:

$$M = \frac{\sigma_A(R = -1) - \sigma_A(R = 0)}{\sigma_m(R = 0)} = \frac{\sigma_W - \frac{\sigma_{schw}}{2}}{\frac{\sigma_{schw}}{2}} \quad (2.2)$$

Die Verwendung dieser Geraden führt bei hohen Mittelspannungen zu Aussagen, die zur unsicheren Seite tendieren. Es wurden deshalb in der Vergangenheit eine Reihe von unterschiedlichen Ansätzen (z.B. [6, 39, 62]) vorgestellt. Zu nennen ist *Goodman*, nach dessen Ansatz die Abzisse bei der Zugfestigkeit R_m geschnitten wird. Von *Mertens* und *Hahn* [42] wurde eine quadratische Beziehung mit zwei Parametern b und R_m^*

$$\frac{\sigma_{vm}}{R_m^*} = \frac{2}{b} \cdot \left(1 - \frac{\sigma_A}{\sigma_W}\right) - \frac{2-b}{b} \cdot \left(1 - \frac{\sigma_A}{\sigma_W}\right)^2 \quad (2.3)$$

vorgeschlagen, die bei der Nachrechnung von Versuchsergebnissen auch mit hohen Mittellasten zufriedenstellende Ergebnisse lieferte.

Der fiktive Kennwert R_m^* , der den Schnittpunkt der Dauerfestigkeitslinie mit der σ_{vm} -Achse beschreibt, wird mit den Randbedingungen

$$\begin{aligned}
 [\sigma_{vm}]_{R=0} &= \frac{1}{2} \cdot \sigma_{schw} \\
 [\sigma_A]_{R=0} &= \frac{1}{2} \cdot \sigma_{schw}
 \end{aligned}
 \tag{2.4}$$

an die Schwellfestigkeit des Werkstoffs angepaßt.

Für $b = 1$ ergibt sich die Beziehung nach [39], während $b = 2$ eine Gerade liefert. In [42] wird der Parameter b so angepaßt, daß die Dauerfestigkeitslinie die σ_{vm} -Achse unter 45° schneidet (siehe **Abbildung 2.2**).

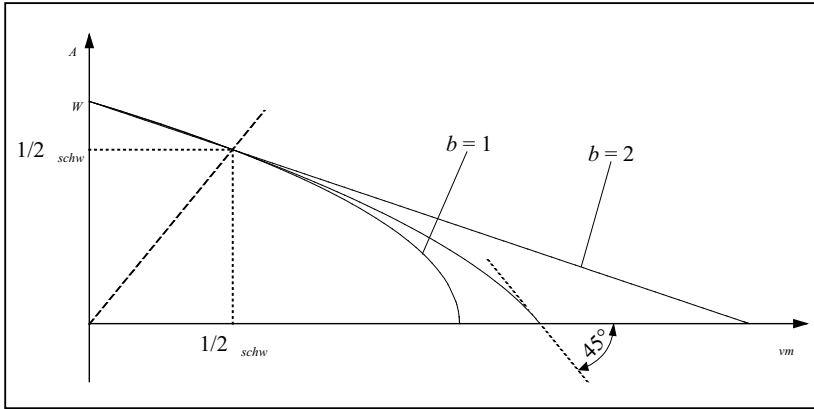


Abbildung 2.2: Haigh-Schaubild nach Gl.(2.3) für verschiedene Parameterwerte b

R_m^* und b lassen sich dann zu

$$\begin{aligned}
 b &= \frac{2 \cdot (1 + 2 \cdot M)}{2 + 2 \cdot M - M^2} \\
 \Rightarrow R_m^* &= \frac{1 + 2 \cdot M}{M \cdot (2 + M)} \cdot \sigma_W
 \end{aligned}
 \tag{2.5}$$

bestimmen. Damit wird sichergestellt, daß die Oberspannung einer einachsigen Belastung nicht größer werden kann als der fiktive Kennwert R_m^* . Zur leichteren Handhabung kann Gl.(2.3) zweckmäßigerweise nach der ertragbaren Amplitude σ_A mit der Abkürzung Q

$$Q = \frac{\sigma_W}{R_m^*} = \frac{M \cdot (2 + M)}{1 + 2 \cdot M} = \frac{4 \cdot \left(\frac{\sigma_W}{\sigma_{schw}} \right)^2 - 1}{4 \cdot \frac{\sigma_W}{\sigma_{schw}} - 1}
 \tag{2.6}$$

und dem in Gl.(2.1) definierten Spannungsverhältnis R

$$\frac{\sigma_A}{\sigma_W} = \frac{-Q + \sqrt{Q^2 + (1 - Q) \cdot (1 - R)^2}}{(1 - Q) \cdot (1 - R)} \quad (2.7)$$

umgestellt werden. Der Einfluss der Mittelspannungsempfindlichkeit M auf

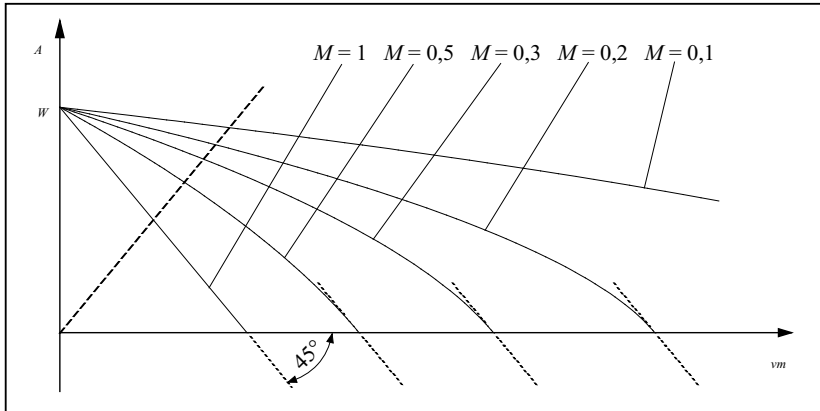


Abbildung 2.3: *Haigh-Schaubild für verschiedene Mittelspannungsempfindlichkeiten M*

die Dauerfestigkeitslinie ist in **Abbildung 2.3** dargestellt. Um unzulässig große Bauteilverformungen zu vermeiden, ist die ertragbare Oberspannung bei reiner Zugbeanspruchung auf die statische Streckgrenze des Werkstoffs zu beschränken, so daß die Dauerfestigkeitslinie im *Haigh*-Schaubild an der Streckgrenze abgeschnitten wird. Außerdem soll Gl.(2.7) nur für Belastungen

$$\frac{\sigma_{vm}}{\sigma_W} > -1 \quad (2.8)$$

angewendet werden, um die festigkeitssteigernde Wirkung von Druckmittelspannungen nicht zu überschätzen.

2.1.2 Zeitfestigkeit einachsig belasteter ungekerbter Probestäbe

Die Lebensdauerbewertung im Zeitfestigkeitsbereich ordnet einer gegebenen Beanspruchung eine ertragbare Lastwechselzahl N zu. Hierfür existiert eine Vielzahl von Konzepten, die alle die Kenntnis der Spannungs- oder Dehnungswöhlerlinie voraussetzen. Um den Mittelspannungseinfluß zu berücksichtigen, werden entweder sogenannte Schädigungsparameter oder lastspielzahlabhängige *Haigh*-Schaubilder verwendet.

2.1.2.1 Spannungs- und Dehnungs-Wöhlerlinien

Für den funktionalen Zusammenhang zwischen der ertragbaren Beanspruchungsamplitude σ_A und der zugehörigen Lastwechselzahl N wird üblicherweise die Formulierung von *Basquin* [22]

$$\sigma_A = \sigma_D \cdot \left(\frac{N_D}{N} \right)^{1/k} \quad \text{für } N \leq N_D \quad (2.9)$$

verwendet. In Gl.(2.9) steht σ_D für die Dauerschwingfestigkeit und N_D für die zugehörige Ecklastspielzahl. Die Beziehung liefert für die Spannungs-Wöhlerlinie eine Gerade im doppeltlogarithmischen Maßstab, deren negative Steigung dem Exponenten k entspricht.

Neben den Spannungen können auch die Dehnungen über der Lastwechselzahl N aufgetragen werden und man erhält die entsprechenden Dehnungs-Wöhlerlinien.

Die totale Dehnungsamplitude $\epsilon_{a,ges}$ setzt sich aus dem der Spannung proportionalen elastischen Anteil $\epsilon_{a,el}$ und dem plastischen Anteil $\epsilon_{a,pl}$ zusammen

$$\epsilon_{a,ges} = \frac{\Delta\epsilon}{2} = \epsilon_a = \epsilon_{a,el} + \epsilon_{a,pl} \quad . \quad (2.10)$$

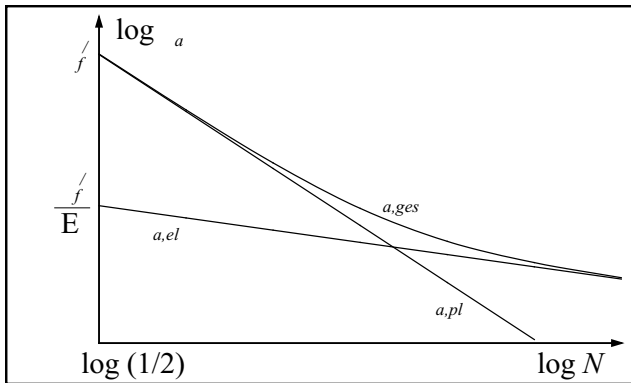


Abbildung 2.4: Dehnung-Wöhlerlinien für eine wechselnde Beanspruchung

Ausgehend von der Dauerfestigkeit, für die der elastische Anteil maßgeblich ist, nimmt der Einfluß der plastischen Dehnungsamplitude zu und wird mehr und mehr lebensdauerbestimmend. Von *Coffin* [5], *Manson* [38] und *Morrow* [45] stammt der Ansatz zur funktionalen Beschreibung des Zusammenhangs zwischen der elastischen bzw. plastischen Dehnungsamplitude und der ertragbaren

Lastspielzahl N mit dem zyklischen Spannungskoeffizienten σ'_f , dem Exponenten b , der elastischen Dehnungs-Wöhlerlinie, dem zyklischen Dehnungskoeffizienten ϵ'_f und dem Exponenten c der plastischen Dehnungs-Wöhlerlinie:

$$\begin{aligned}\epsilon_{a,el} &= \frac{\sigma'_f}{E} \cdot (2 \cdot N)^b \\ \epsilon_{a,pl} &= \epsilon'_f \cdot (2 \cdot N)^c\end{aligned}\tag{2.11}$$

Aufgetragen im doppeltlogarithmischen Maßstab ergeben sich wiederum zwei Geraden (siehe **Abbildung 2.4**). Die beiden Koeffizienten σ'_f und ϵ'_f entsprechen der sogenannten “wahren” Spannung und “wahren” Dehnung für $N = 1/2$, also unter Berücksichtigung der Probeneinschnürung.

2.1.1.2 Zyklische Spannungs-Dehnungskurve

Die zyklische Spannungs- Dehnungskurve beschreibt den Zusammenhang zwischen der Spannungs- und der Dehnungs-Wöhlerlinie. Versuchstechnisch kann sie auf drei verschiedene Arten ermittelt werden. Zum einen durch sogenannte spannungsgesteuerte Versuche, für die die wechselnde Ausschlagsspannung konstant gehalten wird. Nach einer gewissen Schwingenspielzahl stellt sich eine stabilisierte Hystereseschleife ein, d.h. die Dehnungsamplitude ändert sich nicht mehr. Durch Wiederholung des Versuchs auf verschiedenen Lastniveaus wird die zyklische Spannungs-Dehnungskurve als Verbindungslinie der Umkehrpunkte der stabilisierten Hysteresen gewonnen. Zum anderen können die stabilisierten Hysteresen auch durch dehnungsgesteuerte Versuche erzeugt werden. Da beide Verfahren recht aufwendig sind, wurde zur experimentellen Bestimmung der zyklischen Spannungs-Dehnungskurve der Incremental Step Test [33] vorgeschlagen. Für die Versuchsdurchführung wird nur eine Probe benötigt. Diese wird mit einer Dehnungsamplitude beaufschlagt, die in kleinen Schritten zwischen Null und einem Größtwert zunächst gesteigert und dann wieder vermindert wird. Dieser Vorgang wird solange wiederholt, bis sich stabilisierte Hystereseschleifen ausgebildet haben. Die zyklische Spannungs-Dehnungskurve ist wiederum die Verbindungslinie der Umkehrpunkte.

Durch die parametrische *Ramberg-Osgood*-Beziehung [52]

$$\frac{\Delta\epsilon}{2} = \epsilon_a = \frac{\sigma_a}{E} + \left(\frac{\sigma_a}{K'} \right)^{1/n'}\tag{2.12}$$

läßt sich die zyklische Spannungs-Dehnungskurve gut abbilden. Bei den verwendeten Parametern handelt es sich um den Verfestigungsexponenten n' , den zyklischen Festigkeitskoeffizienten K' und den Elastizitätsmodul E . Unter

Berücksichtigung der zyklischen 0,2%-Dehngrenze $R'_{p0,2}$ kann Gl.(2.12) auch

$$\frac{\Delta\epsilon}{2} = \epsilon_a = \epsilon_{a,el} + \epsilon_{a,pl} = \frac{\sigma_a}{E} + 0,002 \cdot \left(\frac{\sigma_a}{R'_{p0,2}} \right)^{1/n'} \quad (2.13)$$

geschrieben werden.

Der Zusammenhang von Spannungs-, Dehnungs-Wöhlerlinie und zyklischer Spannungs-Dehnungskurve läßt sich an der Abhängigkeit der verwendeten Parameter zeigen. Für die elastischen Anteile in den Gl.(2.11) und (2.13) in Verbindung mit Gl.(2.9) ergibt sich für glatte Stäbe unter Zugbeanspruchung

$$b = -\frac{1}{k} \quad (2.14)$$

und durch Elimination von $2N$ in Gl.(2.11) in Verbindung mit Gl.(2.12)

$$n' = \frac{b}{c} \quad \text{und} \quad K' = \frac{\sigma_f'}{\epsilon_f^{b/c}} \quad (2.15)$$

2.1.2.3 Berücksichtigung des Mittelspannungseinflusses

Die Spannungs-Wöhlerlinie Gl.(2.9) gilt nur für rein wechselnde Beanspruchungen. Zur Berücksichtigung von Mittelspannungen stehen prinzipiell zwei Wege zur Verfügung. Zum einen können Mittelspannungen nach einem Vorschlag von *Smith, Watson* und *Topper* [59] in einem Schädigungsparameter P_{SWT}

$$P_{SWT} = \sqrt{\sigma_o \cdot \epsilon_a \cdot E} = \sqrt{(\sigma_a + \sigma_m) \cdot \epsilon_a \cdot E} \quad , \quad (2.16)$$

der sowohl die wechselnden, als auch die ruhenden Anteile (σ_a und σ_m) der Beanspruchung enthält, berücksichtigt werden. Die ertragbare Lastspielzahl wird dann an einer speziellen Schädigungs-Wöhlerlinie

$$P_{SWT|R=-1} = \sqrt{\sigma_a \cdot \epsilon_a \cdot E} \quad , \quad (2.17)$$

die für eine rein wechselnde Beanspruchung ($\sigma_m = 0$) ermittelt wird, bestimmt. Diese Schädigungs-Wöhlerlinie kann entweder experimentell aufgenommen werden, oder durch Einsetzen von Gl.(2.11) in Gl.(2.17)

$$P_{SWT|R=-1} = \sqrt{\sigma_f'^2 \cdot (2 \cdot N)^{2 \cdot b} + E \cdot \sigma_f' \cdot \epsilon_f' \cdot (2 \cdot N)^{b+c}} \quad (2.18)$$

berechnet werden.

Dieses Verfahren impliziert allerdings eine Mittelspannungsempfindlichkeit M . Wird rein elastisches Werkstoffverhalten vorausgesetzt, dann ergibt sich für

eine Zugwechselbelastung ($\sigma_a = \sigma_W$ und $\epsilon_a = \sigma_W/E$) ein Schädigungswert P_{SWT} ($R = -1$)

$$[P_{SWT}]_{R=-1} = \sqrt{\sigma_a \cdot \epsilon_a \cdot E} = \sigma_W \quad (2.19)$$

und für eine Zugschwellbelastung ($\sigma_o = \sigma_{schw}$ und $\epsilon_a = \sigma_{schw}/2E$) ein Schädigungswert P_{SWT} ($R = 0$)

$$[P_{SWT}]_{R=-1} = \sqrt{\sigma_o \cdot \epsilon_a \cdot E} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sigma_{schw} \quad (2.20)$$

Mit Gl.(2.2) folgt dann für P_{SWT} ($R = 0$) = P_{SWT} ($R = -1$)

$$M = \sqrt{2} - 1 \approx 0,4 \quad (2.21)$$

Der Schädigungsparameter nach *Smith, Watson* und *Topper* setzt also eine Mittelspannungsempfindlichkeit von $M \approx 0,4$ voraus. Hochfeste Werkstoffe besitzen hingegen eine Mittelspannungsempfindlichkeit, die deutlich größer ist, was dann wiederum bei Anwendung des Verfahrens zu Aussagen führt, die auf der unsicheren Seite liegen. Es sind deshalb in der Vergangenheit zahlreiche Modifikationen vorgeschlagen worden (z.B. [23], [25], [2]).

Das zweite Verfahren zur Berücksichtigung von Mittelspannungen für Lebensdaueraussagen im Zeitfestigkeitsbereich verwendet sogenannte lastspielzahlabhängige *Haigh*-Schaubilder, in denen jeder Zeitfestigkeitslinie eine konstante Lastspielzahl zugeordnet wird. Diese Vorgehensweise ist dem Konstrukteur wesentlich vertrauter, da er dieses Verfahren üblicherweise bereits für Dauerfestigkeitsaussagen mittelspannungsbehafteter Beanspruchungen verwendet.

Um die Zeitfestigkeitslinien für verschiedene Lastspielzahlen N in Analogie zu Gl.(2.7) bestimmen zu können, müssen die Parameter σ_W und Q formal in ihre zeitfesten Werte σ_{WN} und Q_N überführt und eine entsprechende Annahme für den Zeitfestigkeitsverlauf von Q_N getroffen werden. Da für σ_W gerade das Spannungsverhältnis $R = -1$ ist, ergibt sich σ_{WN} gemäß Gl.(2.9) zu

$$\sigma_{WN} = \sigma_W \cdot \left(\frac{N_D}{N} \right)^{1/k} \quad (2.22)$$

Es wird vorausgesetzt, daß die Zeitfestigkeitslinie die Mittelspannungsachse σ_{vm} weiterhin bei dem nunmehr aber zeitfesten fiktiven Kennwert $R_{mN}^* = \sigma_{WN}/Q_N$ schneidet. Mit der Annahme, daß für diesen Quotienten ebenfalls eine Wöhlerliniengleichung entsprechend Gl.(2.9) mit dem noch unbekannten Exponenten k' formuliert werden kann, gilt:

$$\frac{\sigma_{WN}}{Q_N} = \frac{\sigma_W}{Q} \cdot \left(\frac{N_D}{N} \right)^{1/k'} \quad (2.23)$$

Mit den Gl.(2.22) und (2.23) läßt sich der gesuchte Zeitfestigkeitsverlauf von Q_N

$$Q_N = Q \cdot \left(\frac{N_D}{N} \right)^{1/k_Q} \quad \text{mit} \quad \frac{1}{k_Q} \equiv \frac{1}{k} - \frac{1}{k'} \quad (2.24)$$

als Wöhlerliniengleichung mit dem Exponenten k_Q angeben. Der Parameter Q ist entsprechend Gl.(2.6) abhängig von der Mittelspannungsempfindlichkeit bei Dauerfestigkeit. Übertragen auf die Zeitfestigkeit ergibt sich für Q_N

$$Q_N = \frac{M_N \cdot (2 + M_N)}{1 + 2 \cdot M_N} \quad (2.25)$$

Die lastspielzahlabhängige Mittelspannungsempfindlichkeit M_N nimmt für den Grenzfall der Dauerfestigkeit den Wert M ($M_N = M$) an, während sich für den Grenzfall der zügigen Beanspruchung ($N = 1/2$) der Wert eins ($M_N = 1$) ergibt, da beim Zugversuch eine beliebige Aufteilung in schwingende und ruhende Anteile vorgenommen werden kann. Mit diesen beiden Bedingungen kann schließlich der noch unbekannte Exponent k_Q

$$k_Q = \frac{\log(2 \cdot N_D)}{\log\left(\frac{1}{Q}\right)} = \frac{\log(2 \cdot N_D)}{-\log(Q)} \quad (2.26)$$

berechnet werden. Die Formel zur Beschreibung der lastspielzahlabhängigen Festigkeitslinien im *Haigh*-Schaubild lautet damit:

$$\frac{\sigma_A}{\sigma_{WN}} = \frac{-Q_N + \sqrt{Q_N^2 + (1 - Q_N) \cdot (1 - R)^2}}{(1 - Q_N) \cdot (1 - R)} \quad (2.27)$$

2.1.3 Festigkeitshypothesen bei mehrachsiger Beanspruchung

Festigkeitskennwerte werden fast ausschließlich an nicht gekerbten, einachsig beanspruchten Proben ermittelt. Demgegenüber müssen die Nachweise der Haltbarkeit eines Bauteils meist an gekerbten Stellen durchgeführt werden, an denen ein mehrachsiger Beanspruchungszustand herrscht. Es ist daher notwendig, geeignete Vergleichsspannungen zu formulieren, um diese gekerbten und mehrachsig beanspruchten Bauteile mit den zulässigen Festigkeitskennwerten vergleichen zu können. Ob eine mehrachsige Beanspruchung vorliegt, läßt sich aus der äußeren Belastung allein nicht angeben. Aufschluß geben die *Mohr*'schen Spannungskreise oder die Transformation des Spannungstensors durch Drehung des körpereigenen Koordinatensystems in ein Hauptachsensystem.

Während bei statischer Beanspruchung ein einachsiger Vergleichsspannungswert zur Beurteilung der Haltbarkeit des Bauteils ausreicht, muß dieser Vergleichswert hingegen bei schwingender Beanspruchung aus einer Vergleichsspannungs-Zeitfunktion ermittelt werden. Zunächst werden Vergleichsspannungen für statische Beanspruchungen erläutert, um daraus auch für schwingende Beanspruchungen Festigkeitshypothesen abzuleiten.

Die von außen auf einen Körper einwirkenden Belastungen rufen flächenhaft verteilte Spannungen hervor. Zur Analyse dieser Spannungen wird an einer beliebigen Stelle im Körper ein infinitesimales rechtwinkliges Volumenelement (**Abbildung 2.5**) herausgeschnitten.

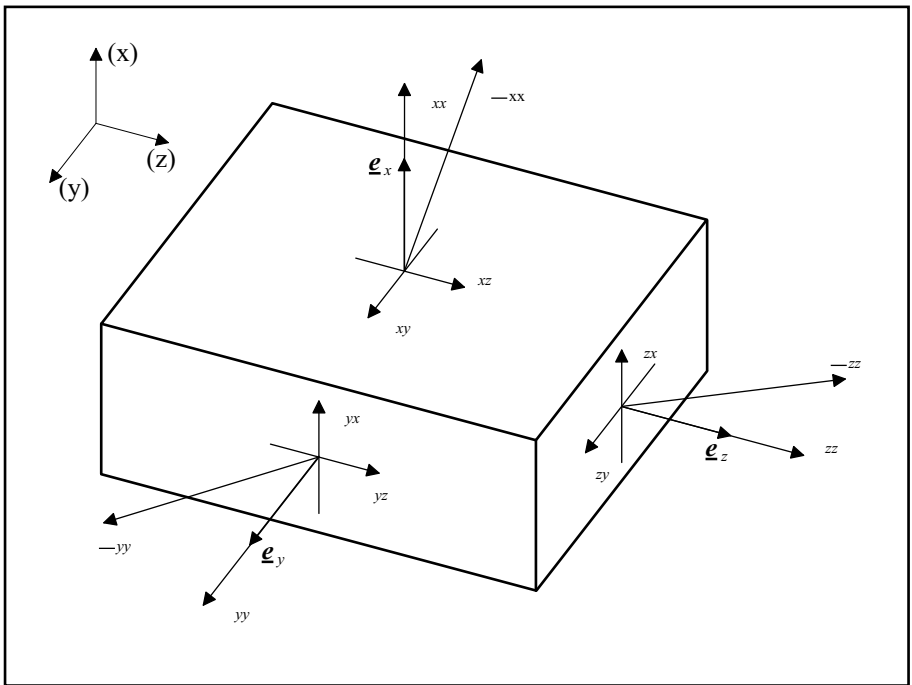


Abbildung 2.5: Dreiachsiger Spannungszustand an einem infinitesimalen rechtwinkligen Volumenelement

Auf den Flächen i ($i = x, y, z$) wird der Spannungsvektor $\underline{\sigma}_{ii}$ in drei Komponenten (σ_{ii} und σ_{ij} mit $i \neq j$) jeweils in Richtung der Koordinatenachsen zerlegt. Die einander zugeordneten Schubspannungen sind nach dem Satz von *Boltzmann* gleich ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$). Der Spannungszustand dieses Volumenelements läßt

sich mathematisch kurz mit dem Spannungstensor $\underline{\underline{\mathbf{S}}}$ beschreiben ^A ^B [20]:

$$\underline{\underline{\mathbf{S}}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \underline{\mathbf{e}}_i \underline{\mathbf{e}}_j \quad (2.28)$$

$$\underline{\underline{\mathbf{S}}} = \sum \sigma_{ij} \underline{\mathbf{e}}_i \underline{\mathbf{e}}_j$$

Durch eine Drehung des Koordinatensystems ändern sich die einzelnen Spannungs-komponenten. In der um beliebige Winkel φ und γ gedrehten Schnitt-ebene lassen sich drei Einheitsvektoren gemäß (**Abbildung 2.6**) definieren:

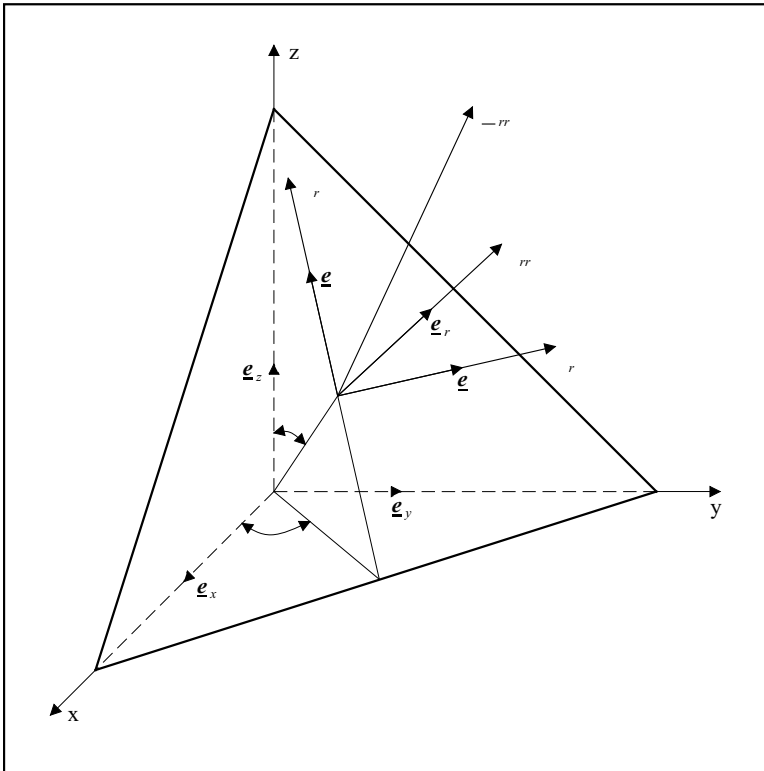


Abbildung 2.6: Dreiachsiger Spannungszustand an einer belie-big gedrehten Schnittfläche

^A $\underline{\mathbf{e}}_i \underline{\mathbf{e}}_j$ ist das dyadische Produkt der Einheitsvektoren $\underline{\mathbf{e}}_i$ und $\underline{\mathbf{e}}_j$.

^BNach *Einstein*'scher Summenkonvention wird im weiteren auf das Summenzeichen ver-zichtet, wenn nicht anders angegeben.

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_r &= (\sin \gamma \cdot \cos \varphi \quad \sin \gamma \cdot \sin \varphi \quad \cos \gamma) \mathbf{e}_i \\
\mathbf{e}_\varphi &= (-\sin \varphi \quad \cos \varphi \quad 0) \mathbf{e}_i \\
\mathbf{e}_\gamma &= (-\cos \gamma \cdot \cos \varphi \quad -\cos \gamma \cdot \sin \varphi \quad \sin \gamma) \mathbf{e}_i
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Der Spannungstensor $\underline{\underline{\mathbf{S}}}^*$ in diesem gedrehten Koordinatensystem läßt sich mit Hilfe des Drehtensors $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$

$$\underline{\underline{\mathbf{D}}} = \begin{pmatrix} \sin \gamma \cdot \cos \varphi & \sin \gamma \cdot \sin \varphi & \cos \gamma \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ -\cos \gamma \cdot \cos \varphi & -\cos \gamma \cdot \sin \varphi & \sin \gamma \end{pmatrix} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j, \tag{2.30}$$

dessen Koeffizientenmatrix orthogonal^C ist, darstellen^D:

$$\underline{\underline{\mathbf{S}}}^* = \underline{\underline{\mathbf{D}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{S}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{D}}}^T. \tag{2.31}$$

Die einzelnen Komponenten des Spannungstensors $\underline{\underline{\mathbf{S}}}^*$ lauten:

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} = \sigma_{xx}^* &= \sin^2 \gamma \cdot \left[\frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cdot \cos 2\varphi + \sigma_{xy} \cdot \sin 2\varphi \right] + \\
&\quad \sin 2\gamma \cdot [\sigma_{xz} \cdot \cos \varphi + \sigma_{yz} \cdot \sin \varphi] + \sigma_{zz} \cdot \cos^2 \gamma \\
\sigma_{r\varphi} = \sigma_{xy}^* &= -\sin \gamma \cdot \left[\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cdot \sin 2\varphi - \sigma_{xy} \cdot \cos 2\varphi \right] - \\
&\quad \cos \gamma \cdot [\sigma_{xz} \cdot \sin \varphi - \sigma_{yz} \cdot \cos \varphi] \\
\sigma_{r\gamma} = \sigma_{xz}^* &= -\sin \gamma \cdot \cos \gamma \cdot \left[\frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cdot \cos 2\varphi + \right. \\
&\quad \left. \sigma_{xy} \cdot \sin 2\varphi - \sigma_{zz} \right] - \cos 2\gamma \cdot [\sigma_{xz} \cdot \cos \varphi + \sigma_{yz} \cdot \sin \varphi] \\
\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{yy}^* &= \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cdot \cos 2\varphi - \sigma_{xy} \cdot \sin 2\varphi \\
\sigma_{\varphi\gamma} = \sigma_{yz}^* &= \cos \gamma \cdot \left[\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cdot \sin 2\varphi - \sigma_{xy} \cdot \cos 2\varphi \right] - \\
&\quad \sin \gamma \cdot [\sigma_{xz} \cdot \sin \varphi - \sigma_{yz} \cdot \cos \varphi] \\
\sigma_{\gamma\gamma} = \sigma_{zz}^* &= \cos^2 \gamma \cdot \left[\frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cdot \cos 2\varphi + \sigma_{xy} \cdot \sin 2\varphi \right] - \\
&\quad \sin 2\gamma \cdot [\sigma_{xz} \cdot \cos \varphi + \sigma_{yz} \cdot \sin \varphi] + \sigma_{zz} \cdot \sin^2 \gamma
\end{aligned} \tag{2.32}$$

^CDamit gilt, daß die inverse Matrix D^{-1} gleich der transponierten D^T ist.

^D $\underline{\underline{\mathbf{D}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{S}}}$ ist das Skalarprodukt der beiden Tensoren $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$ und $\underline{\underline{\mathbf{S}}}$.

Um verschiedene Spannungszustände miteinander vergleichen zu können, kann eine sogenannte Hauptachsentransformation durchgeführt werden. Der Spannungstensor vereinfacht sich zu

$$\underline{\underline{\mathbf{S}}} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \underline{\underline{\mathbf{m}_i \mathbf{m}_j}} \quad (2.33)$$

mit den speziellen Einheitsvektoren $\underline{\underline{\mathbf{m}}}$. Neben diesen drei, von einer Drehung des Koordinatensystems unabhängigen Spannungsgrößen σ_i ($i=1, 2, 3$), existieren noch drei weitere unabhängige Größen I_1 , I_2 und I_3 ^{E F},

$$\begin{aligned} I_1 &= \text{Spur}(\underline{\underline{\mathbf{S}}}) \\ &\equiv \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} \\ I_2 &= \frac{1}{2} \cdot \left[\text{Spur}^2(\underline{\underline{\mathbf{S}}}) - \text{Spur}(\underline{\underline{\mathbf{S}}}^2) \right] \\ &\equiv \sigma_{xx} \cdot \sigma_{yy} + \sigma_{xx} \cdot \sigma_{zz} + \sigma_{yy} \cdot \sigma_{zz} - \sigma_{xy}^2 - \sigma_{xz}^2 - \sigma_{yz}^2 \\ I_3 &= \frac{1}{6} \cdot \left[\text{Spur}^3(\underline{\underline{\mathbf{S}}}) - 3 \cdot \text{Spur}(\underline{\underline{\mathbf{S}}}) \cdot \text{Spur}(\underline{\underline{\mathbf{S}}}^2) + 2 \cdot \text{Spur}(\underline{\underline{\mathbf{S}}}^3) \right] \\ &\equiv \sigma_{xx} \cdot \sigma_{yy} \cdot \sigma_{zz} - [\sigma_{xx} \cdot \sigma_{yz}^2 + \sigma_{yy} \cdot \sigma_{xz}^2 + \sigma_{zz} \cdot \sigma_{xy}^2] + \\ &\quad 2 \cdot \sigma_{xy} \cdot \sigma_{xz} \cdot \sigma_{yz} , \end{aligned} \quad (2.34)$$

die als Invarianten des Spannungstensors bezeichnet werden. Werden die Spannungskomponenten nach Gl.(2.32) in diese Gleichungen eingesetzt, läßt sich die Unabhängigkeit vom gewählten Koordinatensystem zeigen.

Mit den Invarianten können die klassischen Vergleichsspannungen nach der *von Mises*-^G, der Normalspannungs-^H und der Schubspannungshypothese^I ausgedrückt werden:

$$\sigma_{v,MH} = \sqrt{I_1^2 - 3 \cdot I_2} , \quad (2.35)$$

$$\sigma_{v,NSH} = \sigma_1 \quad \text{mit} \quad \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 , \quad (2.36)$$

$$\sigma_{v,SSH} = \sigma_1 - \sigma_3 \quad \text{mit} \quad \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 . \quad (2.37)$$

^E $\text{Spur}^2(\underline{\underline{\mathbf{S}}})$ ist das Quadrat der Spur des Spannungstensors und $\text{Spur}(\underline{\underline{\mathbf{S}}}^2)$ ist die Spur des Skalarproduktes von $\underline{\underline{\mathbf{S}}}$ mit sich selbst.

^F I_3 ist gleich der Determinante der Koeffizientenmatrix des Spannungstensors.

^G Wird im folgenden mit MH bezeichnet.

^H Wird im folgenden mit NSH bezeichnet.

^I Wird im folgenden mit SSH bezeichnet.

Dabei fließen die Invarianten in die Berechnung der Hauptspannungen über das sogenannte charakteristische Polynom

$$\sigma_i^3 - I_1 \cdot \sigma_i^2 + I_2 \cdot \sigma_i - I_3 = 0 \quad (2.38)$$

ein.

Die bisherigen Aussagen bezogen sich auf rein statische Beanspruchungen. In der Praxis jedoch setzen sich die einzelnen Komponenten des Spannungstensors $\underline{\underline{\mathbf{S}}}$ meist aus einer statischen und einer schwingenden Belastung zusammen. Bei dem zeitabhängigen Term kann es sich um eine periodische oder eine stochastische Zeitfunktion handeln.

Im folgenden werden die periodischen Belastungen weiter untersucht. Stochastische Belastungen gehören in den Bereich der Betriebsfestigkeitsbewertung, die nicht Gegenstand dieser Arbeit ist.

Durch eine Fourier-Analyse lassen sich für jede Komponente $\sigma_{ij}(t)$ des Spannungstensors $\underline{\underline{\mathbf{S}}}$ eine Mittelspannung σ_{ijm} und für jedes Frequenzverhältnis λ eine Amplitude $\sigma_{ija,\lambda}$ sowie eine zugehörige Phasenverschiebung $\delta_{ij,\lambda}$ bestimmen (i, j = x, y, z). Die allgemeinen Beanspruchungen können kurz

$$\sigma_{ij}(t) = \sigma_{ijm} + \sum_{\lambda=1}^n [\sigma_{ija,\lambda} \cdot \sin(\lambda\omega t - \delta_{ij,\lambda})] \quad (2.39)$$

$$\underline{\underline{\mathbf{S}}}(t) = \underline{\underline{\mathbf{S}}}_m + \underline{\underline{\mathbf{S}}}_a(t) \equiv \underline{\underline{\mathbf{S}}}_a(t)$$

geschrieben werden.

Die Invarianten

$$\begin{aligned} I_{1a}(t) &= \text{Spur} \left(\underline{\underline{\mathbf{S}}}_a(t) \right) \\ I_{2a}(t) &= \frac{1}{2} \cdot \left[\text{Spur}^2 \left(\underline{\underline{\mathbf{S}}}_a(t) \right) - \text{Spur} \left(\underline{\underline{\mathbf{S}}}_a^2(t) \right) \right] \\ I_{3a}(t) &= \frac{1}{6} \cdot \left[\text{Spur}^3 \left(\underline{\underline{\mathbf{S}}}_a(t) \right) - \right. \\ &\quad \left. 3 \cdot \text{Spur} \left(\underline{\underline{\mathbf{S}}}_a(t) \right) \cdot \text{Spur} \left(\underline{\underline{\mathbf{S}}}_a^2(t) \right) + \right. \\ &\quad \left. 2 \cdot \text{Spur} \left(\underline{\underline{\mathbf{S}}}_a^3(t) \right) \right] \end{aligned} \quad (2.40)$$

sind somit ebenfalls abhängig von der Zeit. Um die Vergleichsspannungs-Amplitude für die wechselnden Anteile beispielsweise nach der MH zu ermitteln,

ist das Maximum der Vergleichsspannungs-Zeitfunktion

$$\sigma_{va,MH} = \max [\sigma_{va,MH}(t)] = \max \left[\sqrt{I_{1a}^2(t) - 3 \cdot I_{2a}(t)} \right] \quad (2.41)$$

zu bestimmen. Eine geschlossene Lösung ist nur für den Fall einer einrequenten nicht phasenverschobenen Beanspruchung möglich, für den die Vergleichsspannungs-Amplitude entsprechend Gl.(2.35) berechnet werden kann.

Die Bestimmung der Vergleichsspannungs-Amplitude nach der NSH und der SSH ist für den allgemeinen Fall recht aufwendig, da das körpereigene Hauptachsensystem sich während einer Periode dreht, so daß für jeden Zeitpunkt die Lösungen des charakteristischen Polynoms ermittelt werden müssen. Die Vergleichsspannungs-Amplitude der NSH ist das Maximum der einzelnen Lösungen und der SSH das Maximum der Differenz der ersten und dritten Hauptspannung.

Im **Kapitel 3.1** wird gezeigt, wie sich zeitunabhängige phasenverschobene Spannungskomponenten formuliert lassen.

Sind den schwingenden Anteilen der Belastungen noch ruhende Anteile überlagert, muß für mehrachsige Belastungen neben der Vergleichsspannungs-Amplitude auch eine Vergleichsmittelspannung bestimmt werden. Hierfür bieten sich die klassischen Festigkeitshypothesen entsprechend den Gl.(2.35 - 2.37) an. Die Invarianten I_{1m} , I_{2m} und I_{3m} werden mit den Mittelspannungen der Komponenten des Spannungstensors $\underline{\underline{\mathbf{S}_m}}$ gebildet:

$$\begin{aligned} I_{1m} &= \text{Spur} \left(\underline{\underline{\mathbf{S}_m}} \right) \\ I_{2m} &= \frac{1}{2} \cdot \left[\text{Spur}^2 \left(\underline{\underline{\mathbf{S}_m}} \right) - \text{Spur} \left(\underline{\underline{\mathbf{S}_m}}^2 \right) \right] \\ I_{3m} &= \frac{1}{6} \cdot \left[\text{Spur}^3 \left(\underline{\underline{\mathbf{S}_m}}(t) \right) - \right. \\ &\quad \left. 3 \cdot \text{Spur} \left(\underline{\underline{\mathbf{S}_m}}(t) \right) \cdot \text{Spur} \left(\underline{\underline{\mathbf{S}_m}}^2(t) \right) + \right. \\ &\quad \left. 2 \cdot \text{Spur} \left(\underline{\underline{\mathbf{S}_m}}^3(t) \right) \right] \end{aligned} \quad (2.42)$$

Von *Mertens* [39] wurde für zweiachsige Belastungen die Normalspannungshypothese

$$\sigma_{vm} = \sigma_{1m} = \frac{1}{2} \cdot \left[I_{1m} + \sqrt{I_{1m}^2 - 4 \cdot I_{2m}} \right] \quad (2.43)$$

zur Berechnung der wirksamen Vergleichsmittelspannung vorgeschlagen. Mit ihr werden Zug- bzw. Druckmittelspannungen unterschiedlich bewertet. Wäh-

rend Zugspannungen zu einer positiven Vergleichsmittelspannung führen und damit die ertragbare Amplitude mindern, ergibt sich für Druckmittelspannungen eine Vergleichsmittelspannung von $\sigma_{vm} = 0$. *Dittmann* [10] und *Jaenicke* [28] haben diesen Ansatz erfolgreich bei der Nachrechnung von Versuchsergebnissen eingesetzt.

Die an Versuchsergebnissen [13, 27] beobachtete unterschiedlich festigkeitsmindernde Wirkung einer Mittelspannung in Richtung der wechselnden Normalspannung bzw. senkrecht dazu, wird von Gl.(2.43) nicht berücksichtigt. Von *Hahn* [21] stammt der an Versuchsergebnissen erfolgreich verifizierte Ansatz, die maßgebliche Vergleichsmittelspannung

$$\sigma_{vm} = \max [\sigma_{o,NSH}(t)] - \max [\sigma_{a,NSH}(t)] \quad (2.44)$$

als Differenz der maximalen Oberspannung und der maximalen Ausschlagspannung zu ermitteln. Ihr jeweiliges zeitliches Maximum wird unabhängig voneinander bestimmt. Für mehrachsige Belastungsfälle werden die Ober- und die Ausschlagspannung nach der NSH gebildet. Für die wechselnden Anteile gilt mit den Invarianten gemäß Gl.(2.40)

$$\sigma_{a,NSH}(t) = \sigma_{1,a} \quad \text{mit} \quad (2.45)$$

$$\sigma_{1,a}^3 - I_{1a}(t) \cdot \sigma_{1,a}^2 + I_{2a}(t) \cdot \sigma_{1,a} - I_{3a}(t) = 0, \quad (2.46)$$

während die Oberspannung

$$\sigma_{o,NSH}(t) = \sigma_{1,o} \quad \text{mit} \quad (2.47)$$

$$\sigma_{1,o}^3 - I_{1o}(t) \cdot \sigma_{1,o}^2 + I_{2o}(t) \cdot \sigma_{1,o} - I_{3o}(t) = 0 \quad (2.48)$$

und den Invarianten

$$\begin{aligned} I_{1o}(t) &= \text{Spur} \left(\underline{\underline{\mathbf{S}_o}}(t) \right) \\ I_{2o}(t) &= \frac{1}{2} \cdot \left[\text{Spur}^2 \left(\underline{\underline{\mathbf{S}_o}}(t) \right) - \text{Spur} \left(\underline{\underline{\mathbf{S}_o}}^2(t) \right) \right] \\ I_{3o}(t) &= \frac{1}{6} \cdot \left[\text{Spur}^3 \left(\underline{\underline{\mathbf{S}_o}}(t) \right) - \right. \\ &\quad \left. 3 \cdot \text{Spur} \left(\underline{\underline{\mathbf{S}_o}}(t) \right) \cdot \text{Spur} \left(\underline{\underline{\mathbf{S}_o}}^2(t) \right) + \right. \\ &\quad \left. 2 \cdot \text{Spur} \left(\underline{\underline{\mathbf{S}_o}}^3(t) \right) \right] \end{aligned} \quad (2.49)$$

formuliert wird.

2.2 Werkstoffmodell bei inhomogener Beanspruchung

Reale Bauteile unterscheiden sich von Laborproben dadurch, daß sie inhomogene Spannungsverteilungen infolge von Kerben, aber auch von fertigungsbedingten Eigenspannungen aufweisen. Unter dem Begriff Kerbe sollen im weiteren sowohl Querschnittsänderungen als auch Lastein- oder -umleitungen verstanden werden. Die Abmessungen der Laborproben sind in der Regel deutlich geringer als die realer Bauteile, um den Versuchsaufwand zu reduzieren. Darüber hinaus besitzen industriell gefertigte Oberflächen Rauigkeiten, die in der Regel bei Laborproben vermieden werden, wenn nur das „eigentliche“ Werkstoffverhalten untersucht werden soll.

Der inhomogene Spannungszustand in Kerben wird durch die Störung des Kraftflusses hervorgerufen. Die Folge ist eine örtliche Spannungskonzentration. Die höchsten Spannungen liegen für homogenes, ortsunabhängiges Werkstoffverhalten an der Bauteiloberfläche und klingen ins Bauteilinnere „rasch“ ab. Damit liegt aber auch fast immer ein örtlich mehrachsiger Spannungszustand vor, da die freie Querkontraktion durch das vorhandene Spannungsgefälle behindert ist. In **Abbildung 2.7** ist die Spannungsverteilung beispielhaft für einen gekerbten Rundstab unter Zugbeanspruchung dargestellt (Längsspannung σ_l , Umfangsspannung σ_u , Radialspannung σ_r).

Infolge des inhomogenen Spannungszustandes treten für einen allgemeinen Beanspruchungszustand, der sich aus schwingenden und ruhenden Anteilen zusammensetzt, Spannungsumlagerungen im Bauteil auf. Verantwortlich hierfür sind u.a. Fließvorgänge oder zyklisches Kriechen. Die Spannungsumlagerungen können unterschiedlich große Bereiche erfassen. Der Festigkeitsnachweis kann für derartig belastete Bauteile mit linearelastisch berechneten Spannungen erfolgen, wenn kein globales Fließen im Bauteil zugelassen wird. Zur Berücksichtigung der Spannungsumlagerungen werden dann häufig Stützwirkungskonzepte eingesetzt, mit denen die entsprechenden Stützziffern berechnet werden.

Die elastizitätstheoretische Spannungsspitze $\hat{\sigma}$ bzw. $\hat{\tau}$ kann generell mit Hilfe von FEM-Programmen berechnet werden. Für einfache Bauteilgeometrien und elementare Belastungen stehen dem Konstrukteur verschiedene Kerbformzahlen α_k , die das Verhältnis der elastizitätstheoretischen Spannungsspitze $\hat{\sigma}$ bzw. $\hat{\tau}$ zur Nennspannung S bzw. T beschreiben, zur Verfügung (z.B. [48, 51, 67]), mit denen die Kerbspannungen ebenfalls bestimmt werden können. Bei dieser Vorgehensweise sollten mehrere Aspekte beachtet werden:

- Für die Definition der Kerbformzahl können unterschiedliche Nennspannungen verwendet werden. Der Konstrukteur muß demzufolge bei der Berechnung der Spannungsspitze wissen, ob diese mit der sogenannten

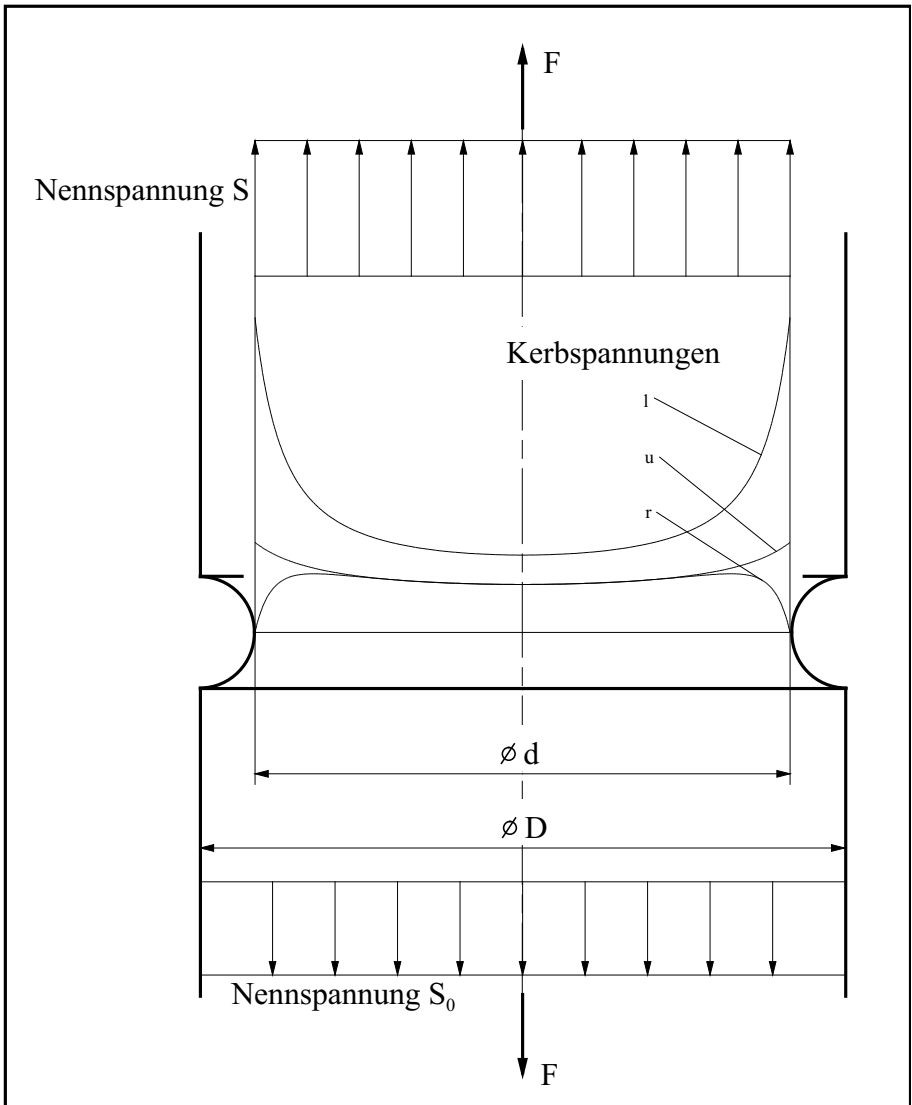


Abbildung 2.7: Mehrachsiger Spannungszustand für einen gekerbten Rundstab

Nettospannung S (Nennspannung im engsten Querschnitt) oder der sogenannten Bruttospannung S_0 (Nennspannung im ungeschwächten Querschnitt) zu ermitteln ist (s. **Abbildung 2.7**).

- Herrscht an der höchstbelasteten Stelle ein mehrachsiger Spannungszu-

stand, so ist für die Größe der Kerbformzahl neben der Nennspannungsdefinition auch die für die Definition der Spannungsspitze verwendete Vergleichsspannungs-Hypothese (beispielsweise NSH oder MH) von Bedeutung.

- Die Berechnung der Spannungsspitze für komplizierte Bauteilgeometrien kann scheitern, weil die Kerbformzahl nicht übertragbar ist und bzw. oder kein geeigneter Querschnitt für die Nennspannungsdefinition angegeben werden kann.
- Für globale Mehrachsigkeiten gilt i.a. nicht, daß die Orte der einzelnen Spannungsspitzen identisch sind. Bei der Verwendung von Kerbformzahlen können aber nur die einzelnen Kerbspannungen rechnerisch überlagert werden, da i.a. weder der Ort noch die Richtung der einzelnen Komponenten bekannt sind.

Diese Ausführungen verdeutlichen die Problematik der Verwendung von Nennspannungen in Verbindung mit Kerbfaktoren für die Lebensdauervorhersage. In **Kapitel 2.2.1** werden weitere Aspekte aufgezeigt und in den **Kapiteln 3.3.1** und **3.3.2** ein alternativer Weg beschrieben.

2.2.1 Stützwirkungskonzepte

Wie bereits oben erwähnt, werden Stützwirkungskonzepte zur Berücksichtigung der Spannungsumlagerung elastisch berechneter Spannungen verwendet. Die in den Konzepten definierten Stützwirkungszahlen und verformungsbehindernden Mehrachsigkeiten dienen der Beschreibung der Spannungsminderung.

Die Spannungsumlagerungen können mehr oder weniger große Bauteilbereiche erfassen. Um die Bereiche gegeneinander abgrenzen zu können, sollen in Anlehnung an die Klassifizierung von Eigenspannungen I., II. und III. Ordnung [11] Stützwirkungen und Mehrachsigkeiten I., II. und III. Ordnung definiert werden. Je nach Größe der Werkstoffbereiche ergeben sich Eigenspannungen, Stützwirkungen und Mehrachsigkeiten, die die Überlagerung der jeweiligen Ordnungen darstellen. Aus der Sichtweise des Konstrukteurs wird der Werkstoff als Kontinuum betrachtet und für Spannungen und Dehnungen i.a. nur kontinuumsbasierte Berechnungen durchgeführt. Deshalb muß die Wirkung der Eigenspannungen, Stützwirkungen und Mehrachsigkeiten II. und III. Ordnung zusammenfassend betrachtet werden. Die Auswirkungen der Effekte II. und III. Ordnung werden deshalb unter dem Sammelbegriff Mikrostützwirkung gemeinsam behandelt, während die Auswirkungen der Effekte I. Ordnung der Makrostützwirkung zugeordnet werden. Werden ganze Bauteilquerschnitte betrachtet, soll von globalen Stützwirkungen gesprochen werden.

2.2.1.1 Mikrostützwirkung

Die Mikrostützwirkung ist ein festigkeitssteigernder Effekt, der rechnerisch dem elastischen Bereich zugeordnet wird und von der Beanspruchungshöhe unabhängig ist. Formelmäßig wird die Mikrostützwirkung beispielsweise für einen mit α_{kz} gekerbten Rundstab unter wechselnder Zugbeanspruchung ($R = -1$) durch

$$n = \frac{\hat{\sigma}}{\bar{\sigma}} = \frac{S \cdot \alpha_{kz}}{S \cdot \beta_{kz}} = \frac{\alpha_{kz}}{\beta_{kz}} \quad (2.50)$$

beschrieben. Hierin ist n die sogenannte elastische Stützziffer, $\bar{\sigma}$ die elastisch gestützte Kerbspannung^J und β_{kz} die entsprechende Kerbwirkungszahl. Dem Konstrukteur stehen zahlreiche Ansätze zur rechnerischen Bestimmung von n zur Verfügung (z.B. [8, 21, 47, 61, 66]).

Allen Ansätzen liegt die Annahme zugrunde, daß die Spannungsspitze durch mikroskopisches Fließen abgebaut wird. Die Geometrie, die Belastungsart und die Werkstoffeigenschaften sind die einfließenden Parameter. *Neuber* [47] verwendet zur rechnerischen Bestimmung eine sogenannte Ersatzstrukturlänge ρ^* , die von der Zusammensetzung und den Eigenschaften des Werkstoffes, den Fertigungsverfahren und der Art des zeitlichen Belastungsverlaufs abhängt, und einen dimensionslosen Faktor s , der die Abhängigkeit von der Beanspruchungsart und der anzuwendenden Festigkeitshypothese beschreibt. Ein Nachteil dieses Modells ist, daß die unterschiedlichen Versuchsergebnisse für zug- bzw. biegebelastete Bauteile bei reiner Wechselbelastung ($R = -1$) nicht erfaßt werden können (Biegeweichselfestigkeit $\sigma_{bW} >$ Zug-Druck-Wechselselfestigkeit σ_W).

Alle anderen Verfahren verwenden zur Beschreibung der Abhängigkeit von der Geometrie und der Belastungsart das sogenannte bezogene Anstrengungsgefälle χ , das nach *Siebel* und *Stieler* [58]

$$\chi = \left. \frac{d\sigma}{dx} \right|_{\hat{\sigma}} \cdot \frac{1}{\hat{\sigma}} \quad (2.51)$$

bestimmt werden kann (s.a. **Abbildung 2.8**). Die elastische Stützziffer $n = n(\chi)$ wird damit eine Funktion von χ .

Mit diesem Modell läßt sich die gegenüber der Zug-Druck-Wechselselfestigkeit experimentell beobachtete höhere Biege-Wechselselfestigkeit erklären. Ebenso wird das Phänomen der mit steigendem Probendurchmesser abfallenden Biege- und Torsions-Wechselselfestigkeit richtig erfaßt. Für einfache Bauteile und Lastfälle sind in [61, 67] Anhaltswerte für das bezogene Anstrengungsgefälle zu finden (s.a. **Abbildung 2.9**).

Die einzelnen Konzepte unterscheiden sich aber in der Berücksichtigung der

^JIm Folgenden werden Kerbspannungen mit $\hat{\sigma}$ und elastisch gestützte Kerbspannungen mit $\bar{\sigma}$ bezeichnet.

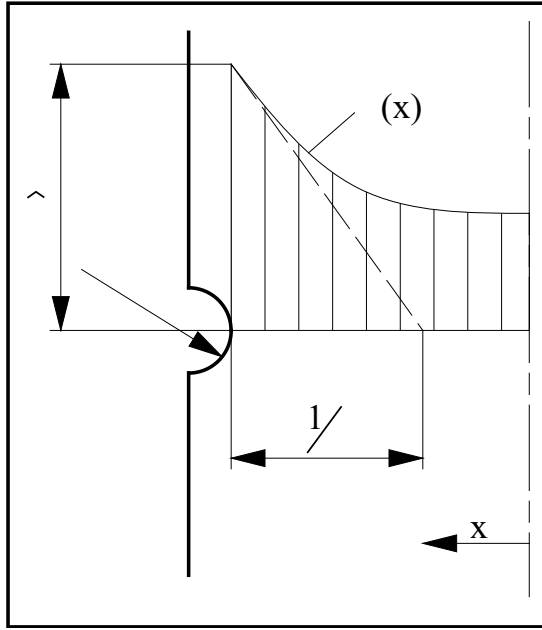


Abbildung 2.8: Bezogenes Anstrengungsgefälle χ

Werkstoffeigenschaften. In den Richtlinien VDI 2226 [66] und TGL 19340 [61] wird die elastische Stützziffer n mit Hilfe eines empirisch gewonnen Diagrammes bestimmt, in dem n in Abhängigkeit von χ und verschiedenen Werkstoffen aufgetragen ist (beispielsweise in [22] dargestellt). *Dietmann* schlägt in [8] eine Näherungsformel für ferritisch-perlitische Stähle vor, mit

$$n(\chi) = 1 + \frac{55 \text{ N/mm}^2}{R_{p0,2}} \cdot \sqrt{\chi \cdot 1 \text{ mm}} . \quad (2.52)$$

Hahn wählte in [21] hingegen einen anderen Weg. Er schlägt vor, die Stützeffekte nicht durch die Größe ihres Einflußbereiches zu definieren, sondern sie durch ihre wesentlichen Wirkmechanismen gegeneinander abzugrenzen. Ausgehend von den Überlegungen von *Lukáš* und *Klesnil* [37], die zur Beschreibung der Mikrostützwirkung einen bruchmechanischen Ansatz wählten, schlägt er

$$n(\chi) = \sqrt{1 + \chi \cdot \rho^*} \quad (2.53)$$

zur Bestimmung der elastischen Stützziffer vor. ρ^* ist eine charakteristische Werkstoffstrukturlänge. Unter der Voraussetzung, daß bei Dauerfestigkeit kleine Risse nicht wachsen, läßt sich ρ^* aus der dauerfest ertragbaren Spannungsintensitätsschwingbreite ΔK_{th0} und der zugehörigen Zugschwelldauerfestigkeit

| Kerbform | Beanspr.- Art | χ_0 [mm ⁻¹] | χ [mm ⁻¹] |
|----------|------------------|---------------------------------|-------------------------------|
| | Zug-Druck | 0 | 2/ |
| | Biegung | 2/b | 2/b + 2/ |
| | Zug-Druck | 0 | 2/ |
| | Biegung | 2/d | 2/d + 2/ |
| | Torsion | 2/d | 2/d + 1/ |
| | Zug-Druck | 0 | 2/ |
| | Biegung | 4/(D+d) | 4/(D+d)+2/ |
| | Torsion | 4/(D+d) | 4/(D+d)+1/ |
| | Zug-Druck | 0 | 2/ |
| | Biegung | 2/D | 2/D + 4/ |
| | Torsion | 2/D | 2/D + 3/ |

| Bauteilform | Zugdruck | Biegung | Torsion |
|--|--|--|--------------------------------------|
| | $\bar{G} \frac{2(1 - \frac{1}{r})}{r}$ | $\bar{G} \frac{2(1 - \frac{1}{r})}{r} \frac{2}{d}$ | $\bar{G} \frac{1}{r} \frac{2}{d}$ |
| | $\bar{G} \frac{2,3(1 - \frac{1}{r})}{r}$ | $\bar{G} \frac{2,3(1 - \frac{1}{r})}{r} \frac{2}{d}$ | $\bar{G} \frac{1,15}{r} \frac{2}{d}$ |
| | $\bar{G} \frac{2(1 - \frac{1}{r})}{r}$ | $\bar{G} \frac{2(1 - \frac{1}{r})}{r} \frac{2}{b}$ | — |
| | $\bar{G} \frac{2,3(1 - \frac{1}{r})}{r}$ | $\bar{G} \frac{2,3(1 - \frac{1}{r})}{r} \frac{2}{b}$ | — |
| | $\bar{G} \frac{2,3}{r}$ | — | — |
| $\frac{1}{4\sqrt{tr}} \frac{1}{2}$ für $d/D > 0,67$ oder $b/B > 0,67$ sonst $=0$; $r > 0$ Für Rundstäbe gelten die Formeln näherungsweise auch dann, wenn eine Längsbohrung vorliegt; Durchmesser $d_i \geq 0$ | | | |

Abbildung 2.9: Bezogenes Anstrengungsgefälle χ_0 aus der Belastung und χ aus der Belastung und der Kerbe, entnommen links [67] und rechts [61] (χ entspricht \bar{G})

σ_{schw} ableiten:

$$\rho^* = \frac{2}{\pi} \cdot \left[\frac{\Delta K_{th0}}{\sigma_{schw}} \right]^2. \quad (2.54)$$

Hahn weist darauf hin, daß aus Invarianzüberlegungen heraus die elastische Stützziffer nicht auf einzelne Spannungskomponenten angewendet werden darf, sondern für die Invarianten gebildet werden muß. Für mehrachsige Beanspruchungen ist dann das bezogene Anstrengungsgefälle χ entweder aus den Ergebnissen einer FEM-Berechnung zu ermitteln oder es nach einem Vorschlag von *Mertens* [40] gewichtet mit den Kerbspannungen zu mitteln.

Alle vorgestellten Konzepte sind dadurch gekennzeichnet, daß sie bei der Bestimmung der Mikrostützwirkung lediglich die „Nachbarschaft“ in Richtung des steilsten Gradienten betrachten. Die Spannungumlagerung wird aber nicht nur in eine Richtung erfolgen, sondern sie wird einen Raum um den betrachteten Punkt erfassen. In **Kapitel 3.3.1** wird deshalb gezeigt, wie die elastische Stützziffer n auf der Grundlage linearer FEM-Berechnungen durch ein räumliches Stützwirkungskonzept bestimmt werden kann.

2.2.1.2 Makrostützwirkung

Mit Hilfe von Makrostützwirkungs-Konzepten kann der Effekt der Reduzierung der Spannungsspitze durch lokales Fließen beschrieben werden. Aufwendige elastisch-plastische FEM-Berechnungen sind dann nicht erforderlich. Die Spannungsumlagerung erfaßt entsprechend der obigen Definition einen größeren lokalen Bereich. Nach *Neuber* können dabei die Mikro- und die Makrostützwirkung gleichzeitig wirken.

In der Vergangenheit wurde eine Vielzahl von Näherungsmethoden zur Abschätzung der sich durch die Fließvorgänge tatsächlich einstellenden örtlichen Spannung $\sigma_{\text{örtl}}$ entwickelt. Eine zusammenfassende Darstellung ist in [10] enthalten. Die Makrostützziffer m kann als Quotient der elastisch gestützten Kerbspannung $\bar{\sigma}$ und der örtlichen Spannung angegeben werden:

$$m = \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_{\text{örtl}}} . \quad (2.55)$$

Für einen örtlich mehrachsigen Spannungszustand schlägt *Neuber* [47] vor, die Vergleichsspannung zu verwenden, die der für den entsprechenden Werkstoff geltenden Festigkeitshypothese entspricht. Zum besseren Verständnis werden die Näherungsmethoden zunächst für einen einachsigen Belastungsfall dargestellt. Die elastisch gestützte Kerbspannung $\bar{\sigma}$ und die mit Hilfe des *Hookeschen* Gesetzes bestimmbare Kerbdehnung $\bar{\epsilon}$ seien bekannt. Ferner soll vorausgesetzt werden, daß das Beanspruchungsniveau oberhalb der 0,2%-Dehngrenze des Werkstoffes liegt.

Die Näherungsmethode von *Neuber*^K besagt, daß das Produkt aus Spannung und Dehnung konstant ist:

$$\sigma \cdot \epsilon = \text{const} = \bar{\sigma} \cdot \bar{\epsilon} . \quad (2.56)$$

Diese Gleichung bildet im Spannungs-Dehnungs-Diagramm eine Hyperbel. Die örtliche Spannung ($\sigma_{\text{örtl}}$) und Dehnung ($\epsilon_{\text{örtl}}$) kann am Schnittpunkt der *Neuber*-Hyperbel mit der Werkstoffkennlinie abgelesen werden. Für eine rein statische Belastung wird die zügige Spannungs-Dehnungskurve für die Werkstoffkennlinie verwendet, während für schwingende Belastungen die zyklische Spannungs-Dehnungskurve eingesetzt wird.

Eine weitere Näherungsbeziehung wurde von *Seeger* und *Beste* [55] entwickelt:

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_F} = \left\{ \left(\frac{\hat{\sigma}}{\sigma_F} \right)^2 \cdot \left[\frac{2}{u^2} \cdot \ln \left(\frac{1}{\cos u} \right) \right] + 1 - \frac{\hat{\sigma}}{\sigma_F} \right\} \cdot \frac{E \cdot e^*}{S^*} \quad (2.57)$$

$$\text{mit } u = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\frac{\hat{\sigma}}{\sigma_F} - 1}{\alpha_p - 1} . \quad (2.58)$$

^KSie wird im Folgenden mit *Neuber*-Hyperbel benannt

Die sogenannte Grenzlastformzahl ergibt sich zu $\alpha_p = \bar{\alpha} \cdot \alpha_k$, während σ_F die Fließspannung mit der zugehörigen Dehnung ϵ_F und S^* die plastische Nennspannung ($S^* = S/\bar{\alpha}$) mit der zugehörigen Dehnung e^* ist. Diese Beziehung hat in der Praxis eine weite Verbreitung gefunden und wird in einigen Betriebsfestigkeitsprogrammen zur Verfügung gestellt.

Mertens [40] und *Dittmann* [10] erweiterten den Anwendungsbereich von Gl.(2.56) auch auf schwach gekerbte Bauteile. Der Grenzfall des glatten Stabes ist ebenfalls enthalten, so daß ein durchgängiges Konzept zur Verfügung steht. Sie erreichten dies, indem als untere Grenze der sogenannten modifizierten *Neuber*-Hyperbel die plastische Nennspannung eingeführt wurde. Die plastische Nennspannung

$$\check{\sigma} = \frac{S}{\bar{\alpha}} \quad (2.59)$$

ist das Minimalniveau, das sich bei Plastizierung über den gesamten Querschnitt einstellt. $\bar{\alpha}$ ist der geometrie- und belastungsartabhängige Formbeiwert (s. z.B.: [11]). Die Gleichung der modifizierten *Neuber*-Hyperbel wird mit

$$(\hat{\sigma} - \check{\sigma}) \cdot (\hat{\epsilon} - \check{\epsilon}) = (\sigma - \check{\sigma}) \cdot (\epsilon - \check{\epsilon}) \quad (2.60)$$

angegeben. Die örtliche Spannung und Dehnung wird am Schnittpunkt der modifizierten *Neuber*-Hyperbel mit der Werkstoffkennlinie ermittelt. Im Gegensatz zu *Neuber* wird die Vergleichsspannung für mehrachsige Belastungsfälle aber nach der MH gebildet, da nach Ansicht der Autoren die plastischen Vorgänge dominieren.

In [21] wurde diese Methode noch weiter modifiziert. Die experimentell aufgenommenen zyklischen Spannungs-Dehnungskurven [32, 26] für glatte Stäbe unterschiedlichen Durchmessers unter Umlaufbiegung zeigen eine deutliche Abhängigkeit vom Probendurchmesser. Dies veranlasste *Hahn*, das Modell zur Bestimmung des unteren Niveaus der modifizierten *Neuber*-Hyperbel zu modifizieren. Die Annahme, der Spannungsabbau könne unabhängig vom Bauteilquerschnitt bis zum vollplastischen Zustand erfolgen, steht im Widerspruch zu den Versuchsergebnissen. Er führte daher eine Randschicht der Dicke ρ_{pl} ein, bis zu der ein Spannungsabbau möglich ist. Durch die Auswertung der Versuchsergebnisse ergab sich für die Dicke der Randschicht ein Wert $\rho_{pl} = 3mm$. Da es sich bei den beiden Versuchswerkstoffen um einen niederfesten Baustahl und einen höherfesten Stahl handelt, schlägt er die grundsätzliche Verwendung einer 3mm Randschicht vor. Physikalisch läßt sich das Phänomen dadurch erklären, daß der inhomogene Spannungszustand, der als treibende Kraft für die Umlagerung angesehen werden kann, mit steigendem Durchmesser immer „flacher“ wird. Am Übergang vom plastischen zum elastischen Bereich bildet sich auf Grund der behinderten Querkontraktion ein mehrachsiger Spannungszustand

aus, der der weiteren Plastizierung ins Innere entgegenwirkt. Werden nun die Bauteilquerschnitte sehr groß, kann der Widerstand nicht bis zur Bauteilmitte überwunden werden. Diese Annahme steht auch im Einklang mit gekerbten Bauteilen. Dort herrscht zwar am Rand i.d.R. ein großer Spannungsgradient, der aber ins Innere schnell kleiner wird. Darüber hinaus liegt unabhängig von den Fließvorgängen bereits ein mehrachsiger Spannungszustand vor, der dem weiteren Plastizieren entgegenwirkt.

In der Arbeit [21] wird statt des Formbeiwertes $\bar{\alpha}$ ein wirksamer Formbeiwert $\bar{\beta}$ für Biegung und Torsion definiert und Näherungsbeziehungen für Rundquerschnitte angegeben, um das untere Niveau der modifizierten *Neuber*-Hyperbel zu bestimmen. Zusätzlich geht *Hahn* im Gegensatz zu *Dittmann* [10] davon aus, daß bei der Bestimmung der örtlichen Oberspannung nicht nur die Mittelspannungen mit dem wirksamen Formbeiwert abgebaut werden, sondern die gesamte Oberspannung, d.h. Amplitude und Mittelspannung.

Auch dieser neue Ansatz basiert auf der Kenntnis der Nennspannungen. Wie bereits mehrmals dargestellt, kann die Definition einer Nennspannung problematisch sein. In **Kapitel 3.3.2** wird ein anderes Verfahren, das keine Kenntnisse über die Nennspannung voraussetzt, vorgestellt.

Neben den Begriffen Mikro- und Makrostützwirkung wurden auch die Begriffe Makromehrachsigkeit und globale Mehrachsigkeit eingeführt. In der Konstruktionspraxis wird die durch Kerben hervorgerufene globale Mehrachsigkeit, die einen Anstieg der Zugfestigkeit und der Dehngrenze bewirkt, nur zur Unterscheidung der möglichen Versagensart (spröder oder duktiler Bruch) herangezogen. Zur Beschreibung dient das niedrigste lokale Plastifizierungsvermögen

$$\begin{aligned}\Pi_{\text{lokal}} &= \frac{\sigma_{v,MH}}{\sigma_1} \\ &= \frac{\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}}{\sqrt{2} \cdot \sigma_1},\end{aligned}\quad (2.61)$$

das somit in engem Zusammenhang mit dem globalen Plastifizierungsvermögen Π_{global} steht. In [21] wird dieser festigkeitssteigernde Effekt auf das dynamische Festigkeitsverhalten übertragen, was auch bereits *Buxbaum* [4] als Notwendigkeit ansah. Dazu wird der Kehrwert des Plastifizierungsvermögens Π — als Fließbehinderung φ bezeichnet — eingeführt:

$$\varphi = \frac{1}{\Pi} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sigma_1}{\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}}. \quad (2.62)$$

Bei der Bestimmung der Makrostützwirkung mit Hilfe der modifizierten *Neuber*-Hyperbel wird zusätzlich zur zyklischen Spannungs-Dehnungskurve des

Werkstoffes (Werkstoffkurve) die bauteilbezogene Spannungs-Dehnungskurve (Bauteilkurve) verwendet (s. **Abbildung 2.10**).

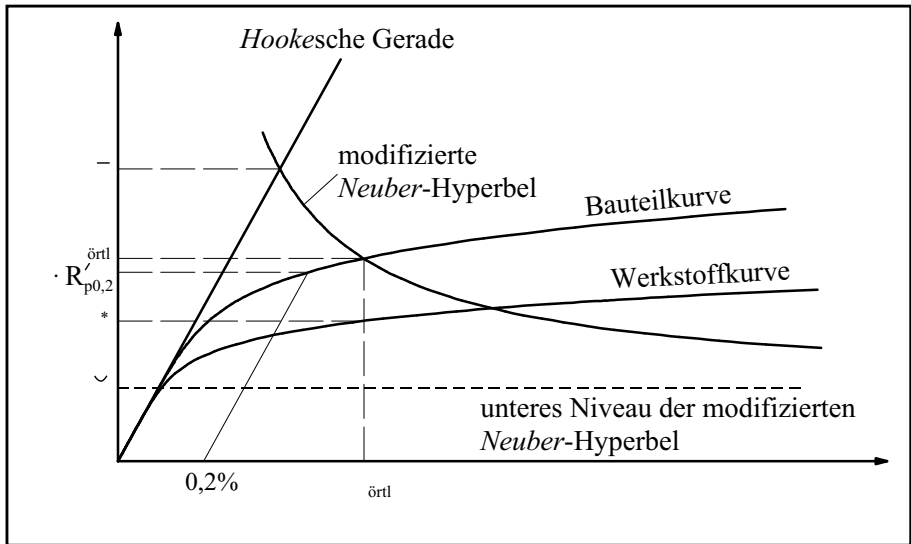


Abbildung 2.10: Modifizierte *Neuber-Hyperbel* unter Berücksichtigung der Fließbehinderung φ

Für die Bauteilkurve gilt, daß die zyklische Dehngrenze auf den Wert $\varphi \cdot R'_{p0,2}$ angehoben wird. Die örtlichen Spannungen und Dehnungen werden am Schnittpunkt der modifizierten *Neuber-Hyperbel* mit der Bauteilkurve bestimmt. Es ergeben sich eine höhere Spannung und niedrigere Dehnung als beim Schnittpunkt mit der Werkstoffkurve. Um den in der Konstruktionspraxis üblichen Weg einer Lebensdaueraussage auf der Grundlage von Spannungen durchführen zu können, wird eine fiktive Spannung σ^* bei gleicher Dehnung ($\epsilon_{\text{örtl}}$) am Schnittpunkt mit der Werkstoffkurve eingeführt. Die Verwendung dieser fiktiven Spannung in der weiteren Berechnung ist möglich, weil für die Lebensdauerbestimmung nicht die Spannungsamplitude, sondern die Dehnungsamplitude maßgeblich ist. Aus der fiktiven Spannung und der elastisch gestützten Kerbspannung werden in [21] die Makrostützziffern der Amplitude

$$m_a = \frac{\bar{\sigma}_a}{\sigma_a^*} \quad (2.63)$$

und der Mittelspannung

$$m_m = \frac{\bar{\sigma}_m}{\sigma_m^*} = \frac{\bar{\sigma}_m}{\sigma_o^* - \frac{\bar{\sigma}_a}{m_a}} \quad (2.64)$$

bestimmt.

Dietmann [7] führte Versuche mit unterschiedlich gekerbten Rundstäben durch. Seine theoretischen Überlegungen stützte er zusätzlich durch spannungsoptische Messungen und kam zu dem Ergebnis, daß sich das globale (maßgebliche) Plastifizierungsvermögen aus dem sich im Kerbbereich stark ändernden lokalen Plastifizierungsvermögen am Ort der maximalen Radialspannung bestimmen läßt. *Hahn* gibt in seiner Arbeit zu bedenken, daß mit zunehmenden Bauteilabmessungen diese Stelle weiter vom Ort des möglichen Werkstoffversagens entfernt liegt. Um diesen möglichen Größeneinflussfaktor zu berücksichtigen, schlägt er eine Näherungsbeziehung für zugbeanspruchte Bauteilquerschnitte

$$\varphi = \frac{1}{0,46 + \frac{0,54}{1 + 3 \cdot \chi}} \quad (2.65)$$

vor, deren Parameter der bezogene Spannungsgradient χ ist. Die Gl.(2.65) ist aus der Approximation der Versuchsergebnisse von [7] entstanden. Für schubbeanspruchte Querschnitte soll $\varphi = 1$ gelten. Damit ist es dem Autor gelungen, den Einfluß der Makromehrachsigkeit mit Hilfe der Fließbehinderung bei der Lebensdauerberechnung zu berücksichtigen.

2.2.2 Fertigungseinflüsse

Reale Bauteile weisen bedingt durch den Herstellungsprozeß einige bisher noch nicht berücksichtigte Eigenschaften auf, die die Lebensdauer beeinflussen. Hierzu gehören unter anderem die chemische Zusammensetzung des Werkstoffs, Inhomogenitäten des Gefüges, die Oberflächengüte und durch das Fertigungsverfahren bedingte Eigenspannungen.

Der Einfluß der Oberflächenbeschaffenheit auf die Dauerfestigkeit wurde von *Siebel* und *Gaier* [56] untersucht. Aus einem Schaubild kann der Faktor, um den die Dauerfestigkeit vermindert wird, in Abhängigkeit von der Zugfestigkeit des Werkstoffes und der im Fertigungsverfahren erzielbaren Rauhtiefe abgelesen werden. Dieser Faktor beinhaltet nicht nur den Einfluß der Oberflächenrauigkeit, sondern auch den Einfluß der durch das Fertigungsverfahren eingebrachten Eigenspannungen. Hier sollte eine Trennung erfolgen, da

- durch den technischen Fortschritt ein Rauheitswert nicht mehr eindeutig einem Fertigungsverfahren zugeordnet werden kann,
- neuartige Fertigungsverfahren hinzugekommen sind und
- den Eigenspannungen ein den Mittelspannungen ähnlicher Einfluß zugeschrieben wird.

Bestätigt wird diese Annahme durch die Arbeit [18], in der der geringe Einfluß der Oberflächenrauigkeit auf die Lebensdauer nachgewiesen wird. Auch die Vorstellung einer größeren plastischen Umlagerung im Zeitfestigkeitsbereich führt zu diesem Schluß, da kleine Riefen durch Plastifizierung reduziert bzw. vollständig abgebaut werden. Zur rechnerischen Erfassung der vorhandenen Rauigkeit schlägt *Hahn* in [21] vor, diesen Einfluß in der Mikrostützwirkung zu berücksichtigen. Dazu vermindert er die charakteristische Strukturlänge ρ^* entsprechend Gl.(2.54) um die Rauhtiefe R_z

$$\rho_{eff}^* = \rho^* - R_z = \frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{\Delta K_{th0}}{\sigma_{schw}} \right)^2 - R_z \quad (2.66)$$

Die Mikrostützwirkung wird nach Gl.(2.53) mit ρ_{eff}^* statt ρ^* berechnet.

Für die Bewertung von Makroeigenstressungen (Eigenstressungen I. Ordnung) schlagen *Wohlfahrt* und *Macherauch* [68] die Einführung einer Eigenstressempfindlichkeit M_E vor, die von der Zugfestigkeit des Werkstoffes abhängig ist, um die Reduzierung der Eigenstressungen durch Umplastizieren zu berücksichtigen. Demgegenüber schlägt *Mertens* [40] vor, die Eigenstressungen den Mittelstressungen zu überlagern, so daß die einzelnen Stresskomponenten

$$\sigma_{ij}(t) = \sigma_{ijo}(t) = \sigma_{ija}(t) + \sigma_{ijm} + \sigma_{ije} \quad (2.67)$$

mit $\sigma_{ija}(t)$ nach Gl.(2.39) geschrieben werden. Bei der Bestimmung des unteren Niveaus der modifizierten *Neuber*-Hyperbel sollen die Eigenstressungen aber nicht berücksichtigt werden, da sie nach Auffassung des Autors im Grenzfall vollständig abbaubar sind. Die eigentliche Größe fertigungsbedingter Makroeigenstressungen ist i.d.R. nicht bekannt, zumindest aber ihre Richtung, so daß Kontrollrechnungen mit einer vorgegebenen Makroeigenstressung durchgeführt werden können.

Die Berücksichtigung des Einflusses inhomogener Gefüge, die beispielsweise durch eine Randschichthärtung entstehen, ist schwierig. Neben den in Größe und Verteilung unbekannten Eigenstressungen ist beispielsweise die Zug-Druck-Wechselspannungsfestigkeit eine Funktion des Ortes, da der Härteverlauf über den Querschnitt nicht konstant ist. In [19] wird ein Faktor angegeben, mit dem der Einfluß aber nur tendenziell berücksichtigt werden kann. Eine andere Möglichkeit besteht darin, den Querschnitt in einzelne Zylinder zu unterteilen, denen jeweils unterschiedliche Werkstoffkennwerte zugewiesen werden. In [17] wurde dieses Modell in Verbindung mit einer elastisch-plastischen FEM-Berechnung eingesetzt.

3 Erweiterung der Drei-Invarianten-Hypothese

In diesem Kapitel werden aufbauend auf den Erkenntnissen von [21] neue Konzepte zur Lebensdauervorhersage mehrachsiger phasenverschoben belasteter Bauteile vorgestellt.

Im Rahmen dieser Arbeit wird ein homogenes, ortsunabhängiges Werkstoffverhalten vorausgesetzt. Ausgangspunkt der Bewertung ist der lokale elastizitätstheoretische Spannungszustand, der mit dem FEM-Programm Pro/Mechanica der Firma Parametrics bestimmt wird und somit in diskreten Punkten, den FEM-Knoten, und nicht als Funktion des Ortes vorliegt. Im **Anhang D** ist die Elementierung, Fesselung und Belastung beispielhaft für einige untersuchte Versuchsproben dargestellt.

Auf die Notwendigkeit von Festigkeitshypothesen wurde bereits in **Kapitel 2.1.3** hingewiesen. In realen Bauteilen sind räumlich ungleichmäßige Spannungsverteilungen vorhanden. Für kräftefreie Kerben treten die höchsten Spannungen an der Bauteiloberfläche auf, wenn homogenes, ortsunabhängiges Werkstoffverhalten vorausgesetzt wird. Der Anrißort liegt dann an der Oberfläche. Hierfür lassen sich Lebensdaueraussagen mit Konzepten angeben, die zweiachsige Spannungszustände erfassen können. Hingegen wird in Einspann- oder Kontaktstellen ein Anriß auch unterhalb der Oberfläche beobachtet, wo i.a. ein dreiachsiger Spannungszustand vorliegt. Um auch diese Spannungszustände bewerten zu können, müssen die phasenverschobenen Spannungskomponenten der bestehenden DIH ^A nach *Hahn* erweitert werden (**Kapitel 3.1**). Gleichzeitig wird damit die Grundlage geschaffen, die Lebensdauer randschichtverfestigter Bauteile, deren Versagensort ebenfalls teilweise unterhalb der Oberfläche liegt, bewerten zu können. In den **Kapiteln 3.2.1** und **3.2.2** wird die Vorgehensweise zur Berechnung einer Vergleichsspannungs-Amplitude für einfrequente und mehrfrequente Beanspruchungen vorgestellt.

Für die Berechnung der Mikrostützwirkung können die bezogenen Invarianten-gefälle direkt aus den Ergebnissen der FEM-Berechnung angegeben werden. Hierfür wird in **Kapitel 3.3.1** ein Konzept vorgestellt und diskutiert. Die Bestimmung der Mikrostützziffern mit Hilfe von Nennspannungen, Kerbformzahlen und von der Geometrie und der Belastungsart abhängigen Schaubildern (**Abbildung 2.9**) ist nicht mehr notwendig. Gleichzeitig wird die Schwäche bisheriger Konzepte überwunden, ein bezogenes Spannungsgefälle für zusammengesetzte Beanspruchungen beispielsweise durch eine gewichtete Mittelwert-

^ABei den in der DIH verwendeten drei Invarianten J_1, J_2, J_{12} handelt es sich nicht um die drei klassischen Invarianten des Spannungstensors I_1, I_2, I_3 , sondern um spezielle zeitunabhängige Invarianten phasenverschobener Spannungen.

bildung der einzelnen Werte zu definieren. Außerdem wird ein zweites Verfahren zur Berechnung der Mikrostützziffern vorgeschlagen, das der Forderung aus **Kapitel 2.2.1** nachkommt, bei der Berechnung nicht nur eine Raumrichtung zu berücksichtigen, sondern im Sinne der „Nachbarschaft“ alle Spannungszustände innerhalb eines Teilvolumens einfließen zu lassen.

Die oben genannte Schwäche der Definition einer Nennspannung trifft auch auf die Bestimmung der Makrostützwirkung zu. In **Kapitel 3.3.2** wird ein Konzept vorgestellt, das die Berechnung des unteren Niveaus der modifizierten *Neuber*-Hyperbel allein aus den Informationen der FEM-Ergebnisse ermöglicht. In [21] wird vorgeschlagen, die maßgebliche Fließbehinderung φ in Abhängigkeit von dem bezogenen Spannungsgradienten χ zu bestimmen (s.a. **Kapitel 2.2.1**). Diese Vorgehensweise setzt somit die Kenntnis der Beanspruchungsart voraus. Ein kleines Beispiel soll die Grenzen dieser Vorgehensweise bei der Bewertung von FEM-Ergebnissen verdeutlichen. Für einen torsionsbelasteten Stab, glatt oder gekerbt, verschwindet der fließbehindernde Effekt der lokalen Mehrachsigkeit, wie in [21] gezeigt, d.h. $\varphi = 1$. Für die Fließbehinderung ergibt sich formal nach Gl.(2.62) der Wert $\varphi = 1/\sqrt{3}$, was offensichtlich ein Widerspruch wäre, da die größere schädigende Wirkung einer gleich großen Schubspannung ($\sigma_{xya} = \sigma_{xxa}$) bereits in der Vergleichsspannung berücksichtigt wird. Liegen für die Bewertung die Kerbspannungen aus einer FEM-Berechnung vor, muß die Vorgehensweise überarbeitet werden, da eine Zuordnung der Kerbspannungen zu einzelnen Belastungsfällen i.d.R. schwierig ist und selbst wenn dies gelingt, muß dann eine geeignete „Mischungsregel“ bereitgestellt werden. Eine Lösung wird ebenfalls in **Kapitel 3.3.2** vorgestellt.

Die Berechnung der Vergleichsmittelspannung (s. **Kapitel 3.4**) erfolgt in Analogie zu [21]. Die Vorgehensweise wird dahingehend modifiziert, daß die Bestimmung der Vergleichsmittelspannung aus der maximalen Oberspannung und der maximalen Amplitude konsequent auf die Ermittlung der Mikrostützziffern übertragen wird. Dies hat zur Folge, daß statt der Makrostützziffer m_m , wie bisher üblich, die Stützziffer m_o verwendet werden muß.

Schließlich werden in **Kapitel 3.5** der prinzipielle Ablauf des neuen Lebensdauer-Bewertungskonzepts dargestellt und in **Kapitel 3.6** Abschätz- und Näherungsformeln für die benötigten Kennwerte und Parameter bereitgestellt.

3.1 Invarianten phasenverschobener Spannungen

Zeitunabhängige phasenverschobene Spannungskomponenten, die im folgenden auch kurz Invarianten genannt werden, wurden bereits von *Mertens* [41] und *Hahn* [21] formuliert. In [42] nutzten sie hierfür die Methoden der Signaltechnik,

mit denen Gesetzmäßigkeiten eines beliebigen Zeitsignals, aber auch Zusammenhänge zwischen zwei unterschiedlichen Signalen durch die Verwendung von Korrelationsfunktionen [46] aufgezeigt werden können. Diese Vorgehensweise kann nur teilweise auf die Bestimmung der Invarianten für den dreiachsigen Spannungszustand übertragen werden, da sich geeignete Spannungs kombinationen, wie sie für den zweiachsigen Spannungszustand in [42] formuliert wurden, zur Ermittlung aller Invarianten nicht angeben lassen. In dieser Arbeit wird deshalb ein anderer Weg beschritten.

Im folgenden werden zur Formulierung der Invarianten J_{1a} , J_{2a} und J_{12a} zunächst nur die wechselnden Anteile der einzelnen Spannungskomponenten betrachtet. Darüber hinaus soll die Belastung einfrequent sein ($n = 1 \Rightarrow \lambda = 1$), womit die Beanspruchungen nach Gl.(2.39) sich zu

$$\sigma_{ij}(t) = \sigma_{ija} \cdot \sin(\omega t - \delta_{ij}) \quad (3.1)$$

vereinfachen.

Überlagern sich mehrere Schwingungen, so addieren sich ihre Wirkungen. Haben die einzelnen Schwingungen eine Frequenz, kann eine Resultierende

$$\sum_{i=1}^n B_i \cdot \sin(\omega t - \varphi_i) = B \cdot \sin(\omega t - \varphi) \quad (3.2)$$

angegeben werden, deren Amplitude und Phasenverschiebung mit

$$B = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n B_i \cdot B_j \cdot \cos(\varphi_i - \varphi_j)} \quad (3.3)$$

und

$$\tan(\varphi) = \frac{\sum_{i=1}^n B_i \cdot \sin \varphi_i}{\sum_{i=1}^n B_i \cdot \cos \varphi_i} \quad (3.4)$$

bestimmt werden.

Angewendet auf die erste und zweite Invariante des Spannungstensors gemäß Gl.(2.40) mit den einzelnen Komponenten nach Gl.(3.1), gilt:

$$\begin{aligned} I_{1a}(t) &= \sum_{i=x}^z [\sigma_{iia} \cdot \cos \delta_{ii}] \cdot \sin \omega t - \sum_{i=x}^z [\sigma_{iia} \cdot \sin \delta_{ii}] \cdot \cos \omega t \\ &\equiv a_1 \cdot \sin \omega t - a_2 \cdot \cos \omega t \\ &\equiv a \cdot \sin(\omega t - \varphi_{I_{1a}}) \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned}
&\equiv \sqrt{J_{1a}} \cdot \sin(\omega t - \varphi_{I_{1a}}) \\
&\equiv \sqrt{J_{1a}} \cdot \cos \varphi_{I_{1a}} \cdot \sin \omega t - \sqrt{J_{1a}} \cdot \sin \varphi_{I_{1a}} \cdot \cos \omega t \quad , \\
\\
I_{2a}(t) &= \frac{1}{4} \cdot \left\{ \sum_{i,j=x}^z [\sigma_{iia} \cdot \sigma_{jja} \cdot \cos(\delta_{ii} - \delta_{jj}) - \sigma_{ija}^2] - \right. \\
&\quad \sum_{i,j=x}^z [\sigma_{iia} \cdot \sigma_{jja} \cdot \cos(\delta_{ii} + \delta_{jj}) - \sigma_{ija}^2 \cdot \cos 2\delta_{ij}] \cdot \cos(2\omega t) - \\
&\quad \left. \sum_{i,j=x}^z [\sigma_{iia} \cdot \sigma_{jja} \cdot \sin(\delta_{ii} + \delta_{jj}) - \sigma_{ija}^2 \cdot \sin 2\delta_{ij}] \cdot \sin(2\omega t) \right\} \\
&\equiv \frac{1}{4} \cdot [c - b_1 \cdot \cos(2\omega t) - b_2 \cdot \sin(2\omega t)] \tag{3.6} \\
&\equiv \frac{1}{2} \cdot [J_{2a} - \sqrt{J_{4a}} \cdot \cos 2(\omega t - \varphi_{I_{2a}})] \\
&\equiv \frac{1}{2} \cdot [J_{2a} - \sqrt{J_{4a}} \cdot \cos 2\varphi_{I_{2a}} \cdot \cos(2\omega t) - \\
&\quad \sqrt{J_{4a}} \cdot \sin 2\varphi_{I_{2a}} \cdot \sin(2\omega t)] \quad .
\end{aligned}$$

Zwei der drei gesuchten Invarianten und eine weitere zeitunabhängige phasenverschobene Beziehung sind mit Gl.(3.5) und Gl.(3.6) festgelegt:

$$J_{1a} = \sum_{i,j=x}^z \sigma_{iia} \cdot \sigma_{jja} \cdot \cos(\delta_{ii} - \delta_{jj}) \quad , \tag{3.7}$$

$$J_{2a} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i,j=x}^z [\sigma_{iia} \cdot \sigma_{jja} \cdot \cos(\delta_{ii} - \delta_{jj}) - \sigma_{ija}^2] \quad , \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}
J_{4a} &= \frac{1}{4} \cdot \sum_{i,j,k,l=x}^z \left[\sigma_{iia} \cdot \sigma_{jja} \cdot \sigma_{kka} \cdot \sigma_{lla} \cdot \cos(\delta_{ii} + \delta_{jj} - \delta_{kk} - \delta_{ll}) - \right. \\
&\quad 2 \cdot \sigma_{iia} \cdot \sigma_{jja} \cdot \sigma_{kla}^2 \cdot \cos(\delta_{ii} + \delta_{jj} - 2\delta_{kl}) + \\
&\quad \left. \sigma_{ija}^2 \cdot \sigma_{kla}^2 \cdot \cos 2(\delta_{ij} - \delta_{kl}) \right] \quad . \tag{3.9}
\end{aligned}$$

Eine weitere invariante Größe läßt sich durch eine Zeittransformation gewinnen. $I_{1a}(t)$ und $I_{2a}(t)$ werden auf den gleichen Zeitmaßstab bezogen. Es soll gelten:

$$\omega t^* = \omega t - \varphi_{I_{1a}}$$

$$\Rightarrow \quad \omega t - \varphi_{I_{2a}} = \omega t^* + \varphi_{I_{1a}} - \varphi_{I_{2a}} \quad , \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{I_{2a}}^* &= \varphi_{I_{2a}} - \varphi_{I_{1a}} \\ \Rightarrow \quad \omega t - \varphi_{I_{2a}} &= \omega t^* - \varphi_{I_{2a}}^* \quad . \end{aligned}$$

Die beiden Invarianten können mit Gl.(3.10)

$$I_{1a}(t^*) = \sqrt{J_{1a}} \cdot \sin \omega t^* \quad (3.11)$$

$$I_{2a}(t^*) = \frac{1}{2} \cdot \left[J_{2a} - \sqrt{J_{4a}} \cdot \cos 2 \left(\omega t^* - \varphi_{I_{2a}}^* \right) \right]$$

geschrieben werden, wobei für die Winkelfunktionen

$$\begin{aligned} \cos 2\varphi_{I_{2a}}^* &= \cos 2(\varphi_{I_{2a}} - \varphi_{I_{1a}}) \\ &= \cos 2\varphi_{I_{2a}} \cdot \cos 2\varphi_{I_{1a}} + \sin 2\varphi_{I_{2a}} \cdot \sin 2\varphi_{I_{1a}} \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} &= \cos 2\varphi_{I_{2a}} \cdot [\cos^2 \varphi_{I_{1a}} - \sin^2 \varphi_{I_{1a}}] + \\ &\quad 2 \cdot \sin 2\varphi_{I_{2a}} \cdot \sin \varphi_{I_{1a}} \cdot \cos \varphi_{I_{1a}} \quad \text{und} \end{aligned}$$

$$\sin 2\varphi_{I_{2a}}^* = \sqrt{1 - \cos^2 2\varphi_{I_{2a}}^*} \quad (3.13)$$

gilt. Mit den Gl.(3.5 und 3.6) ergibt sich:

$$\cos 2\varphi_{I_{2a}}^* = \frac{(a_1^2 - a_2^2) \cdot b_1 + 2 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot b_2}{2 \cdot J_{1a} \cdot \sqrt{J_{4a}}} \quad (3.14)$$

Der Zähler von Gl.(3.14) ist unabhängig von der Zeit und der Wahl des Koordinatensystems, was durch Einsetzen der Spannungen gemäß Gl.(2.32) in die Gl.(3.5 und 3.6) gezeigt werden kann. Er wird als 5. Invariante

$$\begin{aligned} J_{5a} &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{i,j,k,l=x}^z \left\{ \sigma_{iia} \cdot \sigma_{jja} \cdot \sigma_{kka} \cdot \sigma_{lla} \cdot \left[\cos(\delta_{ii} + \delta_{jj}) \cdot \right. \right. \\ &\quad \left. \cos(\delta_{kk} + \delta_{ll}) + 2 \cdot \cos \delta_{ii} \cdot \sin \delta_{jj} \cdot \sin(\delta_{kk} + \delta_{ll}) \right] - \\ &\quad \sigma_{iia} \cdot \sigma_{jja} \cdot \sigma_{kla}^2 \cdot \left[\cos(\delta_{ii} + \delta_{jj}) \cdot \cos 2\delta_{kl} + \right. \\ &\quad \left. \left. 2 \cdot \cos \delta_{ii} \cdot \sin \delta_{jj} \cdot \sin 2\delta_{kl} \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.15)$$

definiert. Dieser Ausdruck kann in Anlehnung an den zweiachsigen Belastungsfall als Kombination der Invarianten J_{1a} , J_{2a} und J_{4a} sowie der Größe J_{12a}^2 dargestellt werden, wobei die Indizierung mit den Indizes 1,2 signalisieren soll, daß der Phasenwinkel zwischen den Invarianten $I_{1a}(t^*)$ und $I_{2a}(t^*)$ nach Gl.(3.10 und 3.11) eine zentrale Rolle spielt:

$$J_{5a} = 2 \cdot (J_{4a} - J_{2a}^2 + J_{12a}^2) + J_{1a} \cdot J_{2a} \quad (3.16)$$

Die Bestimmungsgleichung für das Quadrat der dritten noch gesuchten Invarianten lautet somit:

$$J_{12a}^2 = \frac{J_{5a} - J_{1a} \cdot J_{2a}}{2} - J_{4a} + J_{2a}^2 \quad \text{bzw.} \quad (3.17)$$

$$J_{12a}^2 = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i,j,k,l=x}^z \left[\sigma_{ija}^2 \cdot \sigma_{kla}^2 \cdot \sin^2(\delta_{ij} - \delta_{kl}) - \sigma_{iaa} \cdot \sigma_{jja} \cdot \sigma_{kla}^2 \cdot \sin(\delta_{ii} - \delta_{kl}) \cdot \sin(\delta_{jj} - \delta_{kl}) \right] \quad (3.18)$$

Bei Phasengleichheit aller Spannungskomponenten verschwindet J_{12a}^2 !

Damit stehen die drei für den zweiachsigen Spannungszustand bekannten Invarianten für den allgemein dreiachsigen, phasenverschobenen Spannungszustand zur Verfügung. Im **Anhang A.1** sind J_{1a} bis J_{5a} in ausgeschriebener Form dargestellt.

3.2 Vergleichsspannungs-Amplitude

3.2.1 Einfrequente Beanspruchung

Die Vergleichsspannungs-Amplitude für eine einfrequente Beanspruchung wird in Anlehnung an die bisherige Formulierung [21] mit quadratischen Spannungstermen formuliert. Als dritte Invariante wird deshalb die positive Wurzel aus Gl.(3.18) definiert.

$$\sigma_{va} = \sqrt{J_{1a} - k_{aN}^2 \cdot J_{2a} - k_{bN} \cdot J_{12a}} \quad (3.19)$$

Der Gültigkeitsbereich von Gl.(3.19) wird lediglich dadurch eingeschränkt, daß der Werkstoff hinsichtlich seiner Festigkeitseigenschaften isotrop bzw. quasi-isotrop und das Material homogen sein muß. Für die beiden Werkstoffkennwerte k_{aN} und k_{bN} sollen weiterhin die in [21] getroffenen Annahmen gelten.

Für den lastspielzahlabhängigen Werkstoffkennwert k_{aN} , der das Verhältnis

zwischen der zeitfest ertragbaren Zug-Druck-Wechselfestigkeit σ_{WN} und der Torsions-Wechselfestigkeit τ_{WN} beschreibt, wird in Anlehnung an Gl.(2.9) eine Wöhlerliniengleichung

$$k_{aN} = k_a \cdot \left(\frac{N_D}{N} \right)^{1/k_k} \quad (3.20)$$

formuliert, wobei k_a der Wert für Dauerfestigkeit ist, also σ_W/τ_W . Der Exponent k_k wird so angepaßt, daß im Grenzfall der zügigen Beanspruchung die Vergleichsspannungs-Amplitude der *von Mises*-Hypothese entspricht, da dort plastische Vorgänge dominieren:

$$[k_{aN}]_{N=1/2} = \sqrt{3} . \quad (3.21)$$

Für k_k ergibt sich mit Gl.(3.20) und (3.21)

$$k_k = \frac{\log(2 \cdot N_D)}{\log\left(\frac{\sqrt{3}}{k_a}\right)} . \quad (3.22)$$

Zur Bestimmung des zweiten Werkstoffkennwertes k_{bN} wird ein Festigkeitswert $\sigma_{WN,90^\circ}$ eingeführt, der der Normalspannung σ_{xxa} für einen Belastungsfall aus Zug- Druck mit überlagerter 90° phasenverschobener Torsion entspricht. Wird für die Torsionsspannung der Wert

$$\sigma_{xya} = \frac{\sigma_{xxa}}{k_{aN}} = \frac{\sigma_{WN,90^\circ}}{k_{aN}} \quad (3.23)$$

eingesetzt, folgt für k_{bN} aus Gl.(3.19)

$$k_{bN} = k_{aN} \cdot \left[2 - \left(\frac{\sigma_{WN}}{\sigma_{WN,90^\circ}} \right)^2 \right] . \quad (3.24)$$

Der Zeitfestigkeitsverlauf von $\sigma_{WN,90^\circ}$ soll auch entsprechend Gl.(2.9)

$$\sigma_{WN,90^\circ} = \sigma_{W,90^\circ} \cdot \left(\frac{N_D}{N} \right)^{1/k_{90^\circ}} \quad (3.25)$$

formuliert werden. Bei zügiger Beanspruchung ($N = 1/2$) darf die Phasenverschiebung keinen Einfluß haben - k_{bN} muß deshalb dort den Wert Null besitzen-, womit für $\sigma_{WN,90^\circ}$ entsprechend Gl.(3.24)

$$\sigma_{WN,90^\circ} = \left[\frac{\sigma_{WN}}{\sqrt{2}} \right]_{N=1/2} = \frac{\sigma_W}{\sqrt{2}} \cdot (2 \cdot N_D)^{1/k} \quad (3.26)$$

folgt, während bei Dauerfestigkeit ($N = N_D$)

$$\sigma_{WN,90^\circ} = \sigma_{W,90^\circ} \cdot \frac{\sigma_W}{\sqrt{2 - \frac{k_b}{k_a}}} \quad (3.27)$$

gilt. Mit diesen beiden Gleichungen läßt sich schließlich der Exponent k_{90° bestimmen:

$$k_{90^\circ} = \frac{\log(2 \cdot N_D)}{\frac{1}{k} \cdot \log(2 \cdot N_D) + \frac{1}{2} \cdot \log\left(1 - \frac{k_b}{2 \cdot k_a}\right)} \quad (3.28)$$

3.2.2 Mehrfrequente Beanspruchung

Die bisherige Vorgehensweise ermöglicht die Bildung einer Vergleichsspannungs-Amplitude für einfrequente Beanspruchungen. Reale Bauteile unterliegen aber häufig einer periodisch mehrfrequenten Belastung. Im folgenden sollen wiederum zunächst nur die wechselnden Anteile betrachtet werden, womit sich die Spannungsponenten Gl.(2.39) zu

$$\sigma_{ij}(t) = \sum_{\lambda=1}^n [\sigma_{ija,\lambda} \cdot \sin(\lambda\omega t - \delta_{ij,\lambda})] \quad (3.29)$$

vereinfachen.

In dieser Arbeit wird eine einachsige Vergleichsspannungs-Zeitfunktion entwickelt, mit der diese periodischen, mehrfrequenten und phasenverschobenen dreiachsigen Spannungszustände wie für einachsige Belastungen üblich bewertet werden können. Dies gilt zunächst nur für Beanspruchungen unterhalb der Dauerfestigkeit. Allerdings bietet diese Zeitfunktion auch einen natürlichen Zugang zur Betriebsfestigkeits-Berechnung, was aber nicht weiter verfolgt wird, da es den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde.

An die Vergleichsspannungs-Zeitfunktion

$$\tilde{\sigma}_{va}(t) = \sum_{\lambda=1}^n [\sigma_{va,\lambda} \cdot \sin(\lambda\omega t - \delta_{v,\lambda})] \quad (3.30)$$

werden folgende Forderungen gestellt:

- I. Die Amplituden und Phasenverschiebungen müssen unabhängig vom gewählten Koordinatensystem sein.
- II. Die Vergleichsspannungs-Amplituden jeder Frequenz sollen unabhängig voneinander bestimmt werden.

- III. Für einachsige, mehrfrequente Belastungen soll der zeitliche Verlauf der Vergleichsspannungs-Zeitfunktion mit der Originalbelastung bis auf einen eventuellen Phasenunterschied von 180° übereinstimmen.
- IV. Für mehrachsige, mehrfrequente synchrone Belastungen soll ebenfalls Forderung III gelten.

Durch die zweite Forderung soll eine Entkopplung von Vergleichsmittelspannungen und -amplituden erreicht werden, um den Festigkeitsnachweis - wie bisher üblich - mit *Haigh*- oder *Smith*-Schaubildern durchführen zu können. Außerdem liegt dieser Forderung die Annahme zugrunde, daß gleichfrequente Spannungskomponenten sich gegenseitig stärker stützen können, wogegen die schwächere Stützwirkung der Komponenten unterschiedlicher Frequenzen über die Phasenwinkel berücksichtigt wird. Diese Überlegungen werden durch die guten Erfahrungen in [21] gestützt.

Die Vergleichsspannungs-Amplituden in Gl.(3.30) werden zu jeder Frequenz analog Gl.(3.19)

$$\sigma_{va,\lambda} = \sqrt{J_{1a,\lambda} - k_{aN}^2 \cdot J_{2a,\lambda} - k_{bN} \cdot J_{12a,\lambda}} \quad (3.31)$$

mit den Invarianten

$$\begin{aligned} J_{1a,\lambda} &= \sum_{i,j} \sigma_{iia,\lambda} \cdot \sigma_{jja,\lambda} \cdot \cos(\delta_{ii,\lambda} - \delta_{jj,\lambda}) \quad , \\ J_{2a,\lambda} &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{i,j} \left[\sigma_{iia,\lambda} \cdot \sigma_{jja,\lambda} \cdot \cos(\delta_{ii,\lambda} - \delta_{jj,\lambda}) - \sigma_{ija,\lambda}^2 \right] \quad \text{und} \\ J_{12a,\lambda}^2 &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{i,j,k,l} \left[\sigma_{ija,\lambda}^2 \cdot \sigma_{kla,\lambda}^2 \cdot \sin^2(\delta_{ij,\lambda} - \delta_{kl,\lambda}) - \right. \\ &\quad \left. \sigma_{iia,\lambda} \cdot \sigma_{jja,\lambda} \cdot \sigma_{kla,\lambda}^2 \cdot \sin(\delta_{ii,\lambda} - \delta_{kl,\lambda}) \cdot \sin(\delta_{jj,\lambda} - \delta_{kl,\lambda}) \right] \end{aligned} \quad (3.32)$$

gebildet.

Als maßgebliche Vergleichsspannungs-Amplitude im Dauerfestigkeitsbereich

$$\sigma_{va} = \frac{\max \tilde{\sigma}_{va}(t) - \min \tilde{\sigma}_{va}(t)}{2} \quad (3.33)$$

wird die maximale Schwingbreite der Vergleichsspannungs-Zeitfunktion definiert.

Die Phasenlage hat für einfrequente Beanspruchungen $\lambda = 1$ keinen Einfluß

auf die Bestimmung der maßgeblichen Amplitude, da der Zeitnullpunkt beliebig gewählt werden kann (s. **Kapitel 3.2.1**). Sie beeinflussen jedoch die Gesamtanstrengung für mehrfrequente Beanspruchungen.

Das Phasen-Frequenzspektrum $\delta_{v,\lambda}$ der Vergleichsspannungs-Zeitfunktion kann nicht aus dem Prozeß der Bildung der Vergleichsamplituden gewonnen werden, da die Zeitfunktionen unterschiedlicher Frequenzen sich in der Gesamtanstrengung gegenseitig beeinflussen. Die Phasenlage einer bestimmten Frequenz λ ist also nicht allein von dem Zeitverhalten der Spannungskomponenten dieser Frequenz abhängig. Das Spektrum wird deshalb aus dem Zeitverhalten einer geeigneten Phasenfunktion abgeleitet. Da der in [21] formulierte Prozeß nicht direkt auf den dreiachsigen Belastungsfall übertragen werden kann und gegenüber einer Drehung des Koordinatensystems nicht unabhängig ist, wird die Phasenfunktion neu definiert.

Zunächst wird eine Anstrengungsfunktion

$$A^2(t) = I_1^2(t) - k_a^2 \cdot I_2(t) \quad (3.34)$$

mit den Invarianten nach Gl.(2.40) und den Spannungskomponenten nach Gl.(3.29) formuliert. Durch die quadratischen Ausdrücke der Spannungskomponenten schwingt die Anstrengungsfunktion gegenüber den Spannungskomponenten selbst bzw. der Vergleichsspannungs-Zeitfunktion mit doppelter Frequenz um einen positiven Mittelwert. Das Phasen-Frequenzspektrum dieser Funktion kann also nicht direkt auf das der Vergleichsspannungs-Zeitfunktion übertragen werden. Durch Addition geeignet gewählter Konstanten zu jeder Spannungskomponente läßt sich aus der erweiterten Anstrengungsfunktion $A_{\#}^2(t)$ eine Phasenfunktion $\Phi(t, \Delta)$ ableiten, deren Spannungskomponenten linear und nicht mehr quadratisch sind. Diese Vorgehensweise ist ohne Beschränkung der Allgemeinheit zulässig, da nur das Frequenzspektrum der Phasenfunktion nicht aber der Verlauf der absoluten Funktionswerte bestimmt und dann auf die Vergleichsspannungs-Zeitfunktion übertragen wird.

Die erweiterte Anstrengungsfunktion lautet:

$$\begin{aligned} A_{\#}^2(t) = & [\sigma_{xxa}(t) + \Delta\sigma_{xx} + \sigma_{yya}(t) + \Delta\sigma_{yy} + \sigma_{zza}(t) + \Delta\sigma_{zz}]^2 - \\ & k_a^2 \cdot \left\{ [\sigma_{xxa}(t) + \Delta\sigma_{xx}] \cdot [\sigma_{yya}(t) + \Delta\sigma_{yy}] + \right. \\ & [\sigma_{xxa}(t) + \Delta\sigma_{xx}] \cdot [\sigma_{zza}(t) + \Delta\sigma_{zz}] + \\ & [\sigma_{yya}(t) + \Delta\sigma_{yy}] \cdot [\sigma_{zza}(t) + \Delta\sigma_{zz}] - \\ & [\sigma_{xya}(t) + \Delta\sigma_{xy}]^2 - [\sigma_{xza}(t) + \Delta\sigma_{xz}]^2 - \\ & \left. [\sigma_{yza}(t) + \Delta\sigma_{yz}]^2 \right\} . \end{aligned} \quad (3.35)$$

Die Konstanten werden groß gegenüber den Amplituden der Spannungsfunktionen

$$|\sigma_{ij}(t)| \ll |\Delta\sigma_{ij}| \quad (3.36)$$

gewählt, so daß Gl.(3.35) näherungsweise

$$\begin{aligned}
 A_{\#}^2 &\approx [\Delta\sigma_{xx} + \Delta\sigma_{yy} + \Delta\sigma_{zz}]^2 - \\
 &k_a^2 \cdot [\Delta\sigma_{xx} \cdot \Delta\sigma_{yy} + \Delta\sigma_{xx} \cdot \Delta\sigma_{zz} + \Delta\sigma_{yy} \cdot \Delta\sigma_{zz} - \\
 &\quad \Delta\sigma_{xy}^2 - \Delta\sigma_{xz}^2 - \Delta\sigma_{yz}^2] + \\
 &2 \cdot \left\{ [\sigma_{xxa}(t) + \sigma_{yya}(t) + \sigma_{zza}(t)] \cdot \right. \\
 &\quad [\Delta\sigma_{xx} + \Delta\sigma_{yy} + \Delta\sigma_{zz}] - \\
 &\quad \frac{k_a^2}{2} \cdot [\sigma_{xxa}(t) \cdot [\Delta\sigma_{yy} + \Delta\sigma_{zz}] + \\
 &\quad \sigma_{yya}(t) \cdot [\Delta\sigma_{xx} + \Delta\sigma_{zz}] + \\
 &\quad \sigma_{zza}(t) \cdot [\Delta\sigma_{xx} + \Delta\sigma_{yy}] - \\
 &\quad 2 \cdot \sigma_{xya}(t) \cdot \Delta\sigma_{xy} - 2 \cdot \sigma_{xza}(t) \cdot \Delta\sigma_{xz} - \\
 &\quad \left. 2 \cdot \sigma_{yza}(t) \cdot \Delta\sigma_{yz}] \right\}
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

geschrieben werden kann. Zur Bestimmung der Phasenlagen reicht es aus, nur den zeitabhängigen Term von Gl.(3.37) zu verwenden. Die sogenannte Phasenfunktion lautet:

$$\begin{aligned}
 \Phi(t, \Delta) &= [\sigma_{xxa}(t) + \sigma_{yya}(t) + \sigma_{zza}(t)] \cdot \\
 &[\Delta\sigma_{xx} + \Delta\sigma_{yy} + \Delta\sigma_{zz}] - \\
 &\frac{k_a^2}{2} \cdot \left\{ \sigma_{xxa}(t) \cdot [\Delta\sigma_{yy} + \Delta\sigma_{zz}] + \right. \\
 &\quad \sigma_{yya}(t) \cdot [\Delta\sigma_{xx} + \Delta\sigma_{zz}] + \\
 &\quad \sigma_{zza}(t) \cdot [\Delta\sigma_{xx} + \Delta\sigma_{yy}] - \\
 &\quad 2 \cdot [\sigma_{xya}(t) \cdot \Delta\sigma_{xy} + \sigma_{xza}(t) \cdot \Delta\sigma_{xz} + \\
 &\quad \left. \sigma_{yza}(t) \cdot \Delta\sigma_{yz}] \right\} \\
 &= H_1(t, \Delta) - \frac{k_a^2}{2} \cdot H_2(t, \Delta) .
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

Die Vergleichsspannungs-Zeitfunktion Gl.(3.30) soll, wie oben beschrieben, phasentreu zu dieser Funktion verlaufen. Das gesuchte Phasen-Frequenzspektrum $\delta_{v,\lambda}$ gewinnt man durch eine harmonische Reihenentwicklung der Phasenfunktion $\Phi(t, \Delta)$.

In Gl.(3.38) sind die konstanten Werte $\Delta\sigma_{ij}$ noch unbekannt. Für ihre Festlegung wird die Phasenfunktion mit den zeitlich veränderlichen Komponenten des Spannungstensors zum Zeitpunkt t_0 statt der konstanten Werte zum Vergleich herangezogen:

$$\begin{aligned}
\Phi(t, t_0) &= [\sigma_{xxa}(t) + \sigma_{yya}(t) + \sigma_{zza}(t)] \cdot \\
&\quad [\sigma_{xxa}(t_0) + \sigma_{yya}(t_0) + \sigma_{zza}(t_0)] - \\
&\quad \frac{k_a^2}{2} \cdot \left\{ \sigma_{xxa}(t) \cdot [\sigma_{yya}(t_0) + \sigma_{zza}(t_0)] + \right. \\
&\quad \quad \sigma_{yya}(t) \cdot [\sigma_{xxa}(t_0) + \sigma_{zza}(t_0)] + \\
&\quad \quad \sigma_{zza}(t) \cdot [\sigma_{xxa}(t_0) + \sigma_{yya}(t_0)] - \\
&\quad \quad 2 \cdot [\sigma_{xya}(t) \cdot \sigma_{xya}(t_0) + \sigma_{xza}(t) \cdot \sigma_{xza}(t_0) + \\
&\quad \quad \quad \left. \sigma_{yza}(t) \cdot \sigma_{yza}(t_0)] \right\} \\
&= H_1(t, t_0) - \frac{k_a^2}{2} \cdot H_2(t, t_0) \quad .
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Ein charakteristischer Zeitpunkt t_0 , für den die konstanten Terme $\Delta\sigma_{ij}$ gleich den entsprechenden Spannungswerten σ_{ija} sind, läßt sich nur dann definieren, wenn die Hauptspannungsrichtungen sich während einer Periode nicht ändern, was gleichbedeutend mit einer synchronen Belastung ist. Ansonsten dreht sich das Hauptachsensystem während einer Periode T und es existiert kein charakteristischer Zustand. Dann kann ein konstanter Spannungszustand $\Delta\sigma_{ij}$ nur im Mittel den sich ständig ändernden Zustand beschreiben. Die $\Delta\sigma_{ij}$ werden deshalb so gewählt, daß der Betrag des Abstands der Quadrate von $\Phi(t, \Delta)$ und $\Phi(t, t_0)$ integriert über eine Periode T möglichst klein wird. Die absolute Größe der Spannungen zum Zeitpunkt t_0 und der $\Delta\sigma_{ij}$ soll in der Abstandsfunktion G kein Gewicht erhalten, weshalb die Phasenfunktionen auf die jeweilige modifizierte *von-Mises*-Vergleichsspannung bezogen werden:

$$\begin{aligned}
|\Gamma| &= \left| \int_{t=0}^T \int_{t_0=0}^T \left\{ \left[\frac{\Phi(t, t_0)}{\sqrt{\Phi(t_0, t_0)}} \right]^2 - \left[\frac{\Phi(t, \Delta)}{\sqrt{\Phi(t_0, t_0)}} \right]^2 \right\} dt_0 dt \right| \\
&= 0 \text{ bzw. Min. } .
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Für synchrone bzw. einachsige Belastungen lassen sich Werte für $\Delta\sigma_{ij}$ finden, die Gl.(3.40) exakt erfüllen und damit auch die Forderungen III und IV befriedigen (s. **Anhang A.2**). Dagegen werden im allgemeinen Fall die Gewichtungsfaktoren $\Delta\sigma_{ij}$ durch einen Optimierungsalgorithmus bestimmt. Die dabei verwendete Gütefunktion G wird aus Gl.(3.40) abgeleitet. Es hat sich als zweckmäßig erwiesen, die Betragsfunktion zu „verschärfen“. Im Optimierungsalgorithmus werden die Beträge der einzelnen Differenzen minimiert. Dies beruht auf der Annahme, daß die Differenzen der ersten und zweiten Invariante (H_1 bzw. H_2) sowie des gemischten Gliedes jeweils für sich gleich Null werden

müssen, was für synchrone Belastungen gewährleistet ist.

$$\begin{aligned}
 G = & \left| \int_{t=0}^T \int_{t_0=0}^T \left\{ \frac{H_1^2(t, t_0)}{\Phi(t_0, t_0)} - \frac{H_1^2(t, \Delta)}{\Phi(\Delta, \Delta)} \right\} dt_0 dt \right| + \\
 & \left| \int_{t=0}^T \int_{t_0=0}^T \left\{ \frac{H_2^2(t, t_0)}{\Phi(t_0, t_0)} - \frac{H_2^2(t, \Delta)}{\Phi(\Delta, \Delta)} \right\} dt_0 dt \right| + \\
 & \left| \int_{t=0}^T \int_{t_0=0}^T \left\{ \frac{H_1(t, t_0) \cdot H_2(t, t_0)}{\Phi(t_0, t_0)} - \frac{H_1(t, \Delta) \cdot H_2(t, \Delta)}{\Phi(\Delta, \Delta)} \right\} dt_0 dt \right|
 \end{aligned} \quad (3.41)$$

Der Suchraum läßt sich mit den Abkürzungen

$$\frac{\Delta\sigma_{ij}}{\sqrt{\Phi(\Delta, \Delta)}} = \Delta\alpha_{ij} \quad (3.42)$$

und durch die Einführung der Nebenbedingung

$$\begin{aligned}
 1 = & \Delta\alpha_{xx}^2 + \Delta\alpha_{yy}^2 + \Delta\alpha_{zz}^2 + \\
 & (2 - k_a^2) \cdot [\Delta\alpha_{xx} \cdot (\Delta\alpha_{yy} + \Delta\alpha_{zz}) + \Delta\alpha_{yy} \cdot \Delta\alpha_{zz}] + \\
 & k_a^2 \cdot [\Delta\alpha_{xy}^2 + \Delta\alpha_{xz}^2 + \Delta\alpha_{yz}^2]
 \end{aligned} \quad (3.43)$$

einschränken. Bei der Bestimmung der Konstanten treten teilweise numerische Ungenauigkeiten auf (keine eindeutigen Lösungen), so daß die maßgebliche Vergleichsamplitude nach Gl.(3.33) für mehrere Werte $\Delta\sigma_{ij}$ berechnet wird. Entsprechend einer sicheren Auslegung wird das größte σ_{va} als maßgebliche Vergleichsamplitude festgelegt. Im Optimierungsalgorithmus wird k_a gleich Eins gesetzt, was die beste Übereinstimmung mit den Versuchsergebnissen liefert.

3.3 Stützwirkungskonzepte

Mit den bisherigen Ausführungen zur Vergleichsspannungs-Amplitude lassen sich Aussagen zur Lebensdauer von Bauteilen mit einer homogenen Spannungsverteilung und einer rein wechselnden Belastung treffen. Es folgen die Konzepte Mikro- und Makrostützwirkung zur Bewertung inhomogener Spannungszustände. Im Rahmen dieser Arbeit wird davon ausgegangen, daß die Mikrostützziffern und Mikromehrachsigkeiten unabhängig von den Makrostützziffern und Makromehrachsigkeiten sind, was im Einklang mit den Aussagen von *Neuber* [47] steht. Eine getrennte rechnerische Erfassung der beiden Effekte ist damit möglich.

Für das weitere Vorgehen werden der allgemeine Spannungszustand und die Invarianten des Spannungstensors noch einmal zusammengefaßt dargestellt.

$$\underline{\hat{S}}_o(t) = \underline{\hat{S}}_m + \underline{S}_e + \underline{\hat{S}}_a(t) \quad (3.44)$$

$$\hat{\sigma}_{ijo}(t) = \hat{\sigma}_{ijm} + \sigma_{ije} + \hat{\sigma}_{ija} \cdot \sin(\omega t - \delta_{ij}) \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} \hat{I}_{1a}(t) &= \text{Spur} \left(\underline{\hat{S}}_a(t) \right) \\ \hat{I}_{2a}(t) &= \frac{1}{2} \cdot \left[\text{Spur}^2 \left(\underline{\hat{S}}_a(t) \right) - \text{Spur} \left(\underline{\hat{S}}_a^2(t) \right) \right] \\ \hat{I}_{3a}(t) &= \frac{1}{6} \cdot \left[\text{Spur}^3 \left(\underline{\hat{S}}_a(t) \right) - \right. \\ &\quad \left. 3 \cdot \text{Spur} \left(\underline{\hat{S}}_a(t) \right) \cdot \text{Spur} \left(\underline{\hat{S}}_a^2(t) \right) + \right. \\ &\quad \left. 2 \cdot \text{Spur} \left(\underline{\hat{S}}_a^3(t) \right) \right] \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned} \hat{I}_{1o}(t) &= \text{Spur} \left(\underline{\hat{S}}_o(t) \right) \\ \hat{I}_{2o}(t) &= \frac{1}{2} \cdot \left[\text{Spur}^2 \left(\underline{\hat{S}}_o(t) \right) - \text{Spur} \left(\underline{\hat{S}}_o^2(t) \right) \right] \\ \hat{I}_{3o}(t) &= \frac{1}{6} \cdot \left[\text{Spur}^3 \left(\underline{\hat{S}}_o(t) \right) - \right. \\ &\quad \left. 3 \cdot \text{Spur} \left(\underline{\hat{S}}_o(t) \right) \cdot \text{Spur} \left(\underline{\hat{S}}_o^2(t) \right) + \right. \\ &\quad \left. 2 \cdot \text{Spur} \left(\underline{\hat{S}}_o^3(t) \right) \right] \end{aligned} \quad (3.47)$$

3.3.1 Mikrostützwirkung

Bevor die Bestimmungsgleichungen für die Mikrostützziffern n angegeben werden können, müssen drei grundsätzliche Fragen geklärt werden:

1. Welche Festigkeitshypothese ist anzuwenden, um die verschiedenen Spannungszustände miteinander vergleichen zu können?
2. Zu welchem Zeitpunkt soll der Vergleich erfolgen?
3. An welchem Ort soll schließlich die Lebensdauer berechnet werden?

Als Festigkeitshypothese wird eine modifizierte *von Mises*-Vergleichsspannungshypothese vorgeschlagen

$$\sigma_{\text{mod. Mises}}(t) = \sqrt{\hat{I}_{1o}^2(t) - k_a^2 \cdot \hat{I}_{2o}(t)} \quad , \quad (3.48)$$

deren Invarianten nach Gl.(3.47) gebildet werden. Diese Invariantenkombination wurde bereits in **Kapitel 3.2.2** als Ausgangsfunktion zur Bestimmung der Phasenlagen erfolgreich eingesetzt. Zwar wird i.a. zur Beschreibung lokaler Fließvorgänge die *von Mises*-Hypothese verwendet, das unterschiedliche Werkstoffverhalten kann aber erst durch den Parameter k_a berücksichtigt werden. Diese Erkenntnis wird in zahlreichen Vergleichsspannungs-Hypothesen berücksichtigt, so daß es sinnvoll erscheint, diese Vorgehensweise konsequent auch bei der Bestimmung der Stützziffern einzusetzen.

Die modifizierte *von Mises*-Vergleichsspannung nach Gl.(3.48) ist abhängig von dem Ort und von der Zeit. Um die Spannungszustände an den verschiedenen Orten miteinander vergleichen zu können, wird an jedem Ort das zeitliche Maximum gebildet:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{\text{mod. Mises}} &= \max[\sigma_{\text{mod. Mises}}(t)] \\ &= \sigma_{\text{mod. Mises}}(t_0) \end{aligned} \quad (3.49)$$

Da homogenes, ortsunabhängiges Werkstoffverhalten vorausgesetzt wird, erfolgt die Bewertung an der Stelle des größten Wertes aller zuvor ermittelten $\tilde{\sigma}_{\text{mod. Mises}}$. Demgegenüber muß die Bewertung für inhomogenes Werkstoffverhalten an mehreren Stellen erfolgen, da die Stützwirkungskonzepte von einzelnen Werkstoffkennwerten abhängen, so daß der Ort des „größten Maximums“ nicht mit dem der kleinsten Lebensdauer identisch sein muß.

Die bezogenen Invariantengefälle $\chi_{\hat{I}_i}$ der drei Invarianten $\hat{I}_1, \hat{I}_2, \hat{I}_3$ des Spannungstensors $\hat{\underline{\underline{S}}}$ werden in Analogie zu der Definition des bezogenen Anstrengungsgefälles Gl.(2.51) formuliert. Sie unterscheiden sich zu Gl.(2.51) allerdings darin, daß das bezogene Gefälle nicht aus dem Verlauf einer einzelnen Spannungs-komponente des Spannungstensors gebildet wird, sondern auf Grund der Invarianz der Verlauf der Invarianten des Spannungstensors maßgeblich ist. Gleichzeitig ist es damit nicht mehr notwendig, ein bezogenes Spannungsgefälle für zusammengesetzte Beanspruchungen beispielsweise durch eine gewichtete Mittelwertbildung der einzelnen Werte zu definieren.

Die Invarianten der Ausschlagspannungen werden entsprechend Gl.(3.46) zum vorher bestimmten Zeitpunkt $t = t_0$ berechnet. Mit s wird die Laufvariable in

Richtung des Gradienten bezeichnet^B.

$$\begin{aligned}
 |\chi_{\hat{I}_{1a}}| &= \frac{1}{|\hat{I}_{1a}|_{s=s(\tilde{\sigma}_{\text{mod. Mises}})}} \cdot \left(\frac{\partial |\hat{I}_{1a}|}{\partial s} \right)_{s=s(\tilde{\sigma}_{\text{mod. Mises}})} \\
 |\chi_{\hat{I}_{2a}}| &= \frac{1}{|\hat{I}_{2a}|_{s=s(\tilde{\sigma}_{\text{mod. Mises}})}} \cdot \left(\frac{\partial |\hat{I}_{2a}|}{\partial s} \right)_{s=s(\tilde{\sigma}_{\text{mod. Mises}})} \\
 |\chi_{\hat{I}_{3a}}| &= \frac{1}{|\hat{I}_{3a}|_{s=s(\tilde{\sigma}_{\text{mod. Mises}})}} \cdot \left(\frac{\partial |\hat{I}_{3a}|}{\partial s} \right)_{s=s(\tilde{\sigma}_{\text{mod. Mises}})}
 \end{aligned} \tag{3.50}$$

Zur Bestimmung der bezogenen Invariantengefälle der Oberspannung $\chi_{\hat{I}_{io}}$ werden die Invarianten nach Gl.(3.47) gebildet und in Gl.(3.50) ist der Index a durch o zu ersetzen.

Die Definition des Gradienten und damit auch des bezogenen Invariantengefälles erfolgt wie üblich mit dem Betrag. Der Gradient beispielsweise der zweiten Invariante kann, wie **Abbildung 3.1** zeigt, auch negativ sein. Eine Berücksichtigung des Vorzeichens führt dann mit Gl.(3.51) zu Stützziffern kleiner eins. Mit zunehmender Kerbschärfe steigt das bezogene Invariantengefälle während die Mikrostützziffer sinkt, was physikalisch nicht sinnvoll ist, da eine schärfere Kerbe nicht entlastend für ein Bauteil ist. Aus diesem Grund ist der Betrag des bezogenen Invariantengefälles bei der Bestimmung der Mikrostützziffern zu verwenden.

^BAlternativ können die bezogenen Invariantengefälle auch folgendermaßen definiert werden:

$$\begin{aligned}
 |\chi_{\hat{I}_{1a}}| &= \frac{1}{\sqrt{|\hat{I}_{1a}^2|}} \cdot \frac{\partial \sqrt{|\hat{I}_{1a}^2|}}{\partial s} = \frac{1}{|\hat{I}_{1a}|} \cdot \frac{\partial |\hat{I}_{1a}|}{\partial s} \\
 |\chi_{\hat{I}_{2a}}| &= \frac{1}{\sqrt{|\hat{I}_{2a}|}} \cdot \frac{\partial \sqrt{|\hat{I}_{2a}|}}{\partial s} = \frac{1}{2 \cdot |\hat{I}_{2a}|} \cdot \frac{\partial |\hat{I}_{2a}|}{\partial s} \\
 |\chi_{\hat{I}_{3a}}| &= \frac{1}{\sqrt[3]{|\hat{I}_{3a}|}} \cdot \frac{\partial \sqrt[3]{|\hat{I}_{3a}|}}{\partial s} = \frac{1}{3 \cdot |\hat{I}_{3a}|} \cdot \frac{\partial |\hat{I}_{3a}|}{\partial s}
 \end{aligned}$$

Im Unterschied zu Gl.(3.50) sind die bezogenen Invariantengefälle auf „Spannungsebene“ (1. Potenz) formuliert.

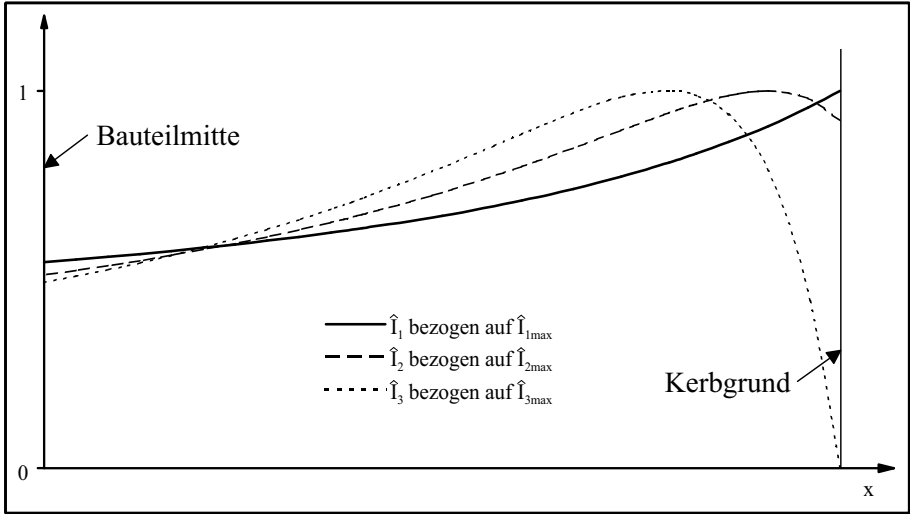


Abbildung 3.1: Verlauf der bezogenen Invarianten \hat{I}_1 , \hat{I}_2 und \hat{I}_3 für einen axialbelasteten Rundstab mit Umlaufkerbe

Für die Berechnung der Mikrostützziffern $n_{G,ia}$ aus dem bezogenen Invariantengefälle wird der Vorschlag aus [21] übernommen, für den die Werkstoffeigenschaften über die Ersatzstrukturlänge ρ^* und die fertigungsbedingten Oberflächenrauigkeiten mit der Rauhtiefe R_z einfließen:

$$\begin{aligned}
 n_{G,1a} &= \sqrt{1 + \rho_{eff} \cdot \chi_{\hat{I}_{1a}}} \\
 n_{G,2a} &= \sqrt{1 + \rho_{eff} \cdot \chi_{\hat{I}_{2a}}} \\
 n_{G,3a} &= \sqrt{1 + \rho_{eff} \cdot \chi_{\hat{I}_{3a}}} \quad \text{mit} \\
 \rho_{eff} &= \rho^* - R_z \quad \text{und} \\
 \rho^* &= \frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{\Delta K_{th0}}{\sigma_{schw}} \right)^2
 \end{aligned} \tag{3.51}$$

Damit können die Vergleichsspannungs-Amplituden

$$\sigma_{G,va,\lambda} = \frac{1}{m_a} \cdot \sqrt{\frac{\hat{J}_{1a,\lambda}}{n_{G,1a}^2} - k_{aN}^2 \cdot \frac{\hat{J}_{2a,\lambda}}{n_{G,2a}} - k_{bN} \cdot \frac{\hat{J}_{12a,\lambda}}{n_{G,12a}}} \tag{3.52}$$

formuliert werden^C. Für die Stützziffer $n_{G,12a}$ gibt es keine entsprechende Invariante des Spannungstensors. Es wird vorgeschlagen, das bezogene Invariantengefälle mit der Invariante \hat{j}_{12a} ^D

$$|\chi_{\hat{j}_{12a}}| = \frac{1}{|\hat{j}_{12a}|_s = s(\tilde{\sigma}_{\text{mod. Mises})}} \cdot \left(\frac{\partial |\hat{j}_{12a}|}{\partial s} \right)_{s = s(\tilde{\sigma}_{\text{mod. Mises})}} \quad (3.53)$$

und daraus die Mikrostützziffer $n_{G,12a}$

$$n_{G,12a} = \sqrt{1 + \rho_{eff} \cdot \chi_{\hat{j}_{12a}}} \quad (3.54)$$

zu bestimmen. Die Definition der Makrostützziffer m_a wird in **Kapitel 3.3.2** dargestellt.

Für die Bewertung mittelspannungsbehafteter Beanspruchungszustände werden die Stützziffern $n_{G,1o}$, $n_{G,2o}$ und $n_{G,3o}$ benötigt. Sie werden mit den entsprechenden bezogenen Invariantengefällen nach Gl.(3.51) berechnet, wobei der Index a durch o zu ersetzen ist.

Die Anwendung dieses Konzeptes auf die Ergebnisse einer FEM-Berechnung erfordert einige spezielle Anpassungen. Die Spannungsverteilung ist nur in den diskreten FEM-Knoten bekannt. Hieraus läßt sich zwar prinzipiell für jede Spannungskomponente eine ortsabhängige Funktionsgleichung rekonstruieren, dies ist aber eine mathematisch sehr anspruchsvolle und zeitintensive Aufgabe, da es sich i.a. um ein unregelmäßiges dreidimensionales Punktegitter handelt und auch die Beschreibung der Volumenberandung in einem speziellen Koordinatensystem nicht trivial ist. Deshalb wird vorgeschlagen, den Gradienten

^C Werden die bezogenen Invariantengefälle nach der Alternative auf Seite 47 formuliert, lauten die Vergleichsspannungs-Amplituden:

$$\sigma_{G,va,\lambda} = \frac{1}{m_a} \cdot \sqrt{\frac{\hat{j}_{1a,\lambda}}{n_{G,1a}^2} - k_{aN}^2 \cdot \frac{\hat{j}_{2a,\lambda}}{n_{G,2a}^2} - k_{bN} \cdot \frac{\hat{j}_{12a,\lambda}}{n_{G,12a}^2}}.$$

Die Mikrostützziffern n werden alle quadriert, da die bezogenen Invariantengefälle auf „Spannungsebene“ formuliert sind. Für kleine Werte $\rho_{eff} \cdot \chi$ kann Gl.(3.51) durch eine Tayler-Reihenentwicklung linearisiert werden, so daß die berechnete Mikrostützwirkung der beiden Alternativen gleich groß ist.

^DFür die Alternative von Seite 47 gilt:

$$|\chi_{\hat{j}_{12a}}| = \frac{1}{\sqrt{|\hat{j}_{12a}|}} \cdot \frac{\partial \sqrt{|\hat{j}_{12a}|}}{\partial s} = \frac{1}{2 \cdot |\hat{j}_{12a}|} \cdot \frac{\partial |\hat{j}_{12a}|}{\partial s}$$

durch seinen Differenzquotienten zu ersetzen:

$$\frac{\partial |\hat{I}_{ia}|}{\partial s} = \frac{|\Delta \hat{I}_{ia}|}{\Delta s} \quad , \quad \frac{\partial |\hat{J}_{ia}|}{\partial s} = \frac{|\Delta \hat{J}_{ia}|}{\Delta s} \quad \text{und} \quad (3.55)$$

$$\frac{\partial |\hat{I}_{io}|}{\partial s} = \frac{|\Delta \hat{I}_{io}|}{\Delta s}$$

Ausgehend vom Punkt der höchsten Beanspruchung sind die Differenzenquotienten zu allen unmittelbar benachbarten FEM-Knoten zu ermitteln. Um aber alle Raumrichtungen zu berücksichtigen, müssen auch weiter entfernte Knoten betrachtet werden. Maßgeblich ist dann der betragsmäßig größte Wert. Durch diese Approximation wird der ermittelte Gradient i.a. immer kleiner als der theoretische sein, was bezüglich der Lebensdauer eine Aussage zur sicheren Seite darstellt. Gleichzeitig wird aber auch der Einfluß des verwendeten FEM-Gitters auf das Ergebnis deutlich, was die generelle Frage nach der Güte der Berechnung aufwirft. Da nur Bauteile mit kräftefreien Oberflächen im Bereich der höchsten Beanspruchung betrachtet werden, wird als Maß für die Güte der FEM-Berechnung

$$G = 100\% \cdot \frac{\sigma_{rr}}{\sigma_1} \bigg|_{\tilde{\sigma}_{\text{mod. Mises}}} \quad (3.56)$$

der prozentuale Quotient aus der Hauptspannung senkrecht zur Oberfläche (σ_{rr}) und der 1. Hauptspannung angegeben, der theoretisch Null sein muß.

Die mit diesem Konzept berechneten Mikrostützziffern sind in **Tabelle 3.1** beispielhaft für einen mit unterschiedlichen Radien gekerbten Rundstab unter wechselnder Zugbelastung, wie er von *Dietmann* [6] verwendet wurde, zusammengefaßt. Die wirksame Strukturlänge wird mit $\rho_{eff} = 0,1 \text{ mm}$ angenommen. Die Stützziffer $n_{G,Mises}$ wird mit

$$n_{G,Mises} = \frac{\hat{\sigma}_{va,Mises}(t_0)}{\bar{\sigma}_{va,Mises}(t_0)} = \frac{\sqrt{\hat{I}_{1a}^2(t_0) - 3 \cdot \hat{I}_{2a}(t_0)}}{\sqrt{\left(\frac{\hat{I}_{1a}(t_0)}{n_{G,1a}}\right)^2 - 3 \cdot \frac{\hat{I}_{2a}(t_0)}{n_{G,2a}}}} \quad (3.57)$$

berechnet. Neben den Stützziffern $n_{G,1a}$, $n_{G,2a}$ und $n_{G,Mises}$ werden die bezogenen Invariantengefälle $\chi_{\hat{I}_{1a}}$ und $\chi_{\hat{I}_{2a}}$ angegeben. Zum Vergleich ist die Mikrostützwirkung $n_{H,1a} \equiv n_{H,Mises}$ berechnet nach [21] aufgeführt.

Im Rahmen dieser Arbeit wird die Kerbgrundspannung für Vergleichsrechnungen nach den Konzepten aus [21] und [19] grundsätzlich mit der Nennspannung

S bzw. T und den Kerbformzahlen α_k ermittelt. D.h., daß beispielsweise für einen gekerbten Rundstab unter Zugbelastung die Kerbgrundspannung $\hat{\sigma}_{xx}$ mit

$$\hat{\sigma}_{xx} = S_{Zug} \cdot \alpha_{kz}$$

berechnet wird und die Umfangsspannung nicht berücksichtigt wird. Wenn nicht anders angegeben, werden die aus der FEM-Berechnung bestimmten Kerbformzahlen verwendet.

Tabelle 3.1: Mikrostützziffern der Invarianten \hat{I}_{1a} , \hat{I}_{2a} und der *von Mises*-Vergleichsspannung für verschiedene Kerbradien ρ berechnet mit Gl.(3.50), Gl.(3.51) und Gl.(3.57)

| ρ | $\chi_{\hat{I}_{1a}}$ | $n_{G,1a}$ | $\chi_{\hat{I}_{2a}}$ | $n_{G,2a}$ | $n_{G,Mises}$ | $\chi_{\hat{\sigma}_{xxa}}$ $= 2/\rho$ | $n_{H,Mises}$ nach [21] |
|--------|-----------------------|------------|-----------------------|------------|---------------|---|----------------------------|
| 8 | 0,101 | 1,005 | 0,703 | 1,035 | 1,000 | 0,25 | 1,012 |
| 4 | 0,212 | 1,011 | 0,785 | 1,038 | 1,005 | 0,5 | 1,025 |
| 2 | 0,450 | 1,022 | 1,002 | 1,049 | 1,021 | 1 | 1,049 |
| 1,5 | 0,610 | 1,030 | 1,173 | 1,057 | 1,032 | 1,33 | 1,065 |
| 1 | 0,926 | 1,045 | 1,550 | 1,075 | 1,054 | 2 | 1,095 |
| 0,5 | 1,852 | 1,088 | 2,829 | 1,133 | 1,117 | 4 | 1,183 |
| 0,25 | 3,665 | 1,169 | 5,668 | 1,252 | 1,234 | 8 | 1,342 |
| 0,11 | 8,208 | 1,349 | 13,47 | 1,532 | 1,517 | 18,18 | 1,679 |

Tabelle 3.1 ist zu entnehmen, daß der Wert des bezogenen Invariantengefälles $\chi_{\hat{I}_{1a}}$ im Mittel 45% des analytischen Wertes $\chi_{\hat{\sigma}_{xxa}} = 2/\rho$ beträgt. Diese Differenz ist auf die unterschiedlichen Gradienten der einzelnen Spannungen $\hat{\sigma}_{xxa}$, $\hat{\sigma}_{yya}$ und $\hat{\sigma}_{zza}$ zurückzuführen. Der bezogene Spannungsgradient der Längsspannung $\hat{\sigma}_{xxa}$ ist im Mittel nur 7% kleiner als der analytische Wert, was auf die Ersetzung des Differentialquotienten durch den Differenzenquotienten zurückzuführen ist.

Der Vergleich der Mikrostützziffer $n_{G,1a}^2$ des Gradientenkonzepts mit der des im folgenden vorgestellten Volumenkonzepts $n_{V,1a}$ aus **Tabelle 3.3** zeigt eine gute Übereinstimmung^E. Folglich wird die Mikrostützwirkung der ersten Invarianten durch das Gradientenkonzept richtig erfaßt. Demgegenüber wird die Stützwirkung der zweiten Invarianten überschätzt (vgl. $n_{G,2a}$ **Tabelle 3.1** und $n_{V,2a}$ **Tabelle 3.3**), was dann wiederum eine Unterschätzung in der Mikrostützziffer der *von Mises*-Vergleichsspannung $n_{G,Mises}$ gegenüber $n_{H,Mises}$ zur Folge hat (s.a. **Tabelle C.2** im **Anhang C**).

^EFür den Vergleich der Mikrostützziffern $n_{G,1a}$ und $n_{V,1a}$ ist es notwendig, die Mikrostützziffer nach dem Gradientenkonzept zu quadrieren, da sie im Gegensatz zu der des Volumenkonzepts aus der linearen Spannungscombination der ersten Invarianten gebildet wird.

Da die Ergebnisse in [21] belegen, daß die Lebensdauerberechnung mit Nennspannungen, geometrieabhängigen Stützziffern und Kerbformzahlen eine gute Übereinstimmung mit den Versuchsergebnissen liefert, müßten demnach die mit dem neuen Gradientenkonzept (Gl.(3.52)) und die nach *Hahn*

$$\sigma_{H,va,\lambda} = \frac{1}{m_a} \cdot \sqrt{\frac{\hat{J}_{1a,\lambda}}{n_{H,1a}^2} - k_{aN}^2 \cdot \frac{\hat{J}_{2a,\lambda}}{n_{H,2a}^2} - k_{bN} \cdot \frac{\hat{J}_{3a,\lambda}}{n_{H,3a}^2}} \quad (3.58)$$

berechneten Vergleichsspannungs-Amplituden $\sigma_{G,va,\lambda}$ und $\sigma_{H,va,\lambda}$ ohne Berücksichtigung der Makrostützwirkung ungefähr gleich groß sein.

In der nachfolgenden **Tabelle 3.2** sind die Vergleichsspannungs-Amplituden für die obigen Proben zusammengefaßt. Die Nennspannung $S_{Zug} = 100 \text{ N/mm}^2$ wird für alle Bauteile gleich groß gewählt und $\sigma_{G,va}$ und $\sigma_{H,va}$ für ein Wechselfestigkeitsverhältnis von $k_a = 1,547$ berechnet.

Tabelle 3.2: Vergleichsspannungs-Amplituden $\sigma_{G,va}$ nach Gl.(3.52) und $\sigma_{H,va}$ nach Gl.(3.58) für verschiedene Kerbradien ρ

| ρ | $\sigma_{G,va}$ | $\sigma_{H,va}$ [21] | ρ | $\sigma_{G,va}$ | $\sigma_{H,va}$ [21] |
|--------|-----------------|----------------------|--------|-----------------|----------------------|
| 8 | 120,6 | 119,6 | 1 | 226,4 | 213,8 |
| 4 | 140,9 | 138,3 | 0,5 | 292,7 | 268,1 |
| 2 | 175,6 | 169,4 | 0,25 | 369,6 | 325,2 |
| 1,5 | 194,7 | 186,3 | 0,11 | 457,1 | 383,2 |

Mit steigender Kerbschärfe wird der Beanspruchungszustand durch das neue Gradientenkonzept deutlich überbewertet, was auf der zu großen Stützziffer der zweiten Invarianten beruht. Gleichzeitig wird diese Tatsache durch das entsprechende Wechselfestigkeitsverhältnis k_a überlagert. Die Umfangsspannung $\hat{\sigma}_{\varphi\varphi}$ an der Oberfläche im Kerbgrund für einen zug- bzw. biegebelasteten Rundstab kann in Abhängigkeit von der Kerbgeometrie als ein Vielfaches der Längsspannung $\hat{\sigma}_{xx}$ geschrieben werden:

$$\hat{\sigma}_{\varphi\varphi} = \alpha \cdot \hat{\sigma}_{xx} \quad (3.59)$$

Wird die Mikrostützwirkung der Invarianten nicht berücksichtigt, können die Vergleichsspannungs-Amplituden –aus der einachsigen bzw. zweiachsigen Beanspruchung berechnet– nur für ein spezielles Wechselfestigkeitsverhältnis $k_a^2 \equiv K^2$ gleich groß sein: ^F

^FWird im folgenden von einem angepaßten Wechselfestigkeitsverhältnis gesprochen, soll darunter dieses spezielle K^2 verstanden werden, das mit Gl.(3.59 und 3.60) aus den Ergebnissen der FEM-Berechnung bestimmt wird.

$$\begin{aligned}
\sigma_{va}|_{\text{zweiachsig}} &= \sqrt{(\hat{\sigma}_{xx} + \hat{\sigma}_{\varphi\varphi})^2 - k_a^2 \cdot \hat{\sigma}_{xx} \cdot \hat{\sigma}_{\varphi\varphi}} \\
&= \hat{\sigma}_{xx} = \sigma_{va}|_{\text{einachsig}}
\end{aligned} \tag{3.60}$$

$$\Longleftrightarrow (1 + \alpha)^2 - K^2 \cdot \alpha = 1 \quad \text{mit } K^2 \equiv k_a^2$$

$$\Longleftrightarrow K^2 = 2 + \alpha$$

Für alle anderen Werte des Wechselfestigkeitsverhältnisses ist die zweiachsig berechnete Vergleichsspannungs-Amplitude größer als die Einachsige.

Die vorangegangenen Ausführungen verdeutlichen, daß die Bewertung der Ergebnisse linearer FEM-Berechnungen mit dem Gradientenkonzept zu sehr konservativen Lebensdauerabschätzungen führen. Es wird deshalb ein volumenbasiertes Konzept vorgeschlagen, um die Mikrostützziffern zu berechnen. Da die Spannungs kombinationen in der Vergleichsspannungs-Amplitude alle quadratische Glieder enthalten, sollen auch die Stützziffern aus den entsprechenden quadratischen Termen abgeleitet werden. Dies gilt aber nicht für die dritte Invariante des Spannungstensors und die von ihr abhängige Stützziffer. Sie wird aus der kubischen Spannungs kombination berechnet. Die einzelnen Bestimmungsgleichungen für die Mikrostützziffern werden als Verhältnis der Invariante \hat{I} am Bauteilrand zu der über das Volumen V gemittelten Invariante \bar{I} definiert:

$$n_{V,1a} = \frac{\hat{I}_{1a}^2(t_0)}{\bar{I}_{1a}^2(t_0)} = \frac{\hat{I}_{1a}^2(t_0)}{\frac{\int_{(V)} \hat{I}_{1a}^2(t_0) dV}{V}} \tag{3.61}$$

$$n_{V,2a} = \frac{\hat{I}_{2a}(t_0)}{\bar{I}_{2a}(t_0)} = \frac{\hat{I}_{2a}(t_0)}{\frac{\int_{(V)} \hat{I}_{2a}(t_0) dV}{V}} \tag{3.62}$$

$$n_{V,12a} = \frac{\hat{J}_{12a}}{\bar{J}_{12a}} = \frac{\hat{J}_{12a}}{\frac{\int_{(V)} \hat{J}_{12a} dV}{V}} \tag{3.63}$$

$$n_{V,3a} = \frac{\hat{I}_{3a}(t_0)}{\bar{I}_{3a}(t_0)} = \frac{\hat{I}_{3a}(t_0)}{\frac{\int_{(V)} \hat{I}_{3a}(t_0) dV}{V}} \tag{3.64}$$

Für die Stützziffern der Oberspannung ist in den Gleichungen Gl.(3.61), Gl.(3.62) und Gl.(3.64) der Index a durch o zu ersetzen.

Die Berechnung der Vergleichsspannungs-Amplituden

$$\sigma_{va,\lambda} = \frac{1}{m_a} \cdot \sqrt{\frac{\hat{J}_{1a,\lambda}}{n_{V,1a}} - k_{aN}^2 \cdot \frac{\hat{J}_{2a,\lambda}}{n_{V,2a}} - k_{bN} \cdot \frac{\hat{J}_{12a,\lambda}}{n_{V,12a}}} \quad (3.65)$$

wird aufgrund der unterschiedlichen Definition der Mikrostützziffer n_{1a} –Gradientenkonzept und Volumenkonzept– im Gegensatz zu Gl.(3.52) nicht mit dem Quadrat der Mikrostützziffer formuliert.

Die oben getroffenen Festlegungen zu den drei Fragen nach der Festigkeitshypothese, dem Zeitpunkt und dem Ort der Berechnung sollen auch hier zur Anwendung kommen. Es wird vorgeschlagen, über eine Kugel zu integrieren, deren Mittelpunkt der Ort der höchsten Beanspruchung ist und die durch die äußere Geometrie des Bauteils begrenzt wird (s.a. **Abbildung 3.2**). Die Größe des Integrationsradius ρ^* dieser Kugel wird durch den Werkstoff bestimmt. Die Werkstoffstrukturlänge ρ_{eff} , die in [21] hergeleitet und bereits in dem obigen Konzept (s. Gl.(3.51)) verwendet wurde, wird als erste Schätzgröße für ρ^* verwendet. Die Gültigkeit wird durch Vergleich mit den Mikrostützziffern nach [21] für glatte Rundstäbe unter Biege- bzw. Torsionsbelastung überprüft. Bei der Berechnung der einzelnen Mikrostützziffern sind die entsprechenden Invarianten nach Gl.(3.46 und 3.47) zu verwenden.

Auch für dieses Verfahren sind einige spezielle Anpassungen für die Bewertung von FEM-Ergebnissen notwendig, die beispielhaft für die zweite Invariante aufgezeigt werden. Für die Integration bietet sich ein Kugelkoordinatensystem mit den Einheitsvektoren nach **Abbildung 3.2** an, so daß beispielsweise für $\bar{I}_{2a}(t_0)$

$$\bar{I}_{2a}(t_0) = \frac{\int_{r=0}^{\rho^*} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\gamma=\gamma_{min}}^{\pi} \hat{I}_{2a}(t_0) \cdot r^2 \cdot \sin \gamma \, dr \, d\varphi \, d\gamma}{V} \quad (3.66)$$

mit

$$V = \int_{r=0}^{\rho^*} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\gamma=\gamma_{min}}^{\pi} r^2 \cdot \sin \gamma \, dr \, d\varphi \, d\gamma \quad (3.67)$$

gilt. Da die ortsabhängige Funktionsbeschreibung von $\hat{I}_{2a}(t_0)$ nicht vorliegt, muß für die Berechnung des Integrals auf ein Näherungsverfahren zurückgegriffen werden. Die Integration wird durch eine Summation über ein kleines Volumenelement $\Delta V(\Delta r, \Delta \varphi, \Delta \gamma)$ ersetzt. Für die in einem ΔV befindlichen FEM-Knoten wird der arithmetische Mittelwert $\hat{I}_{2a}(t_0)$ gebildet. Teilvolumina, die keinen FEM-Knoten beinhalten, werden bei der Summation nicht berücksichtigt, so daß das berechnete Gesamtvolumen V als Maß für die Güte der

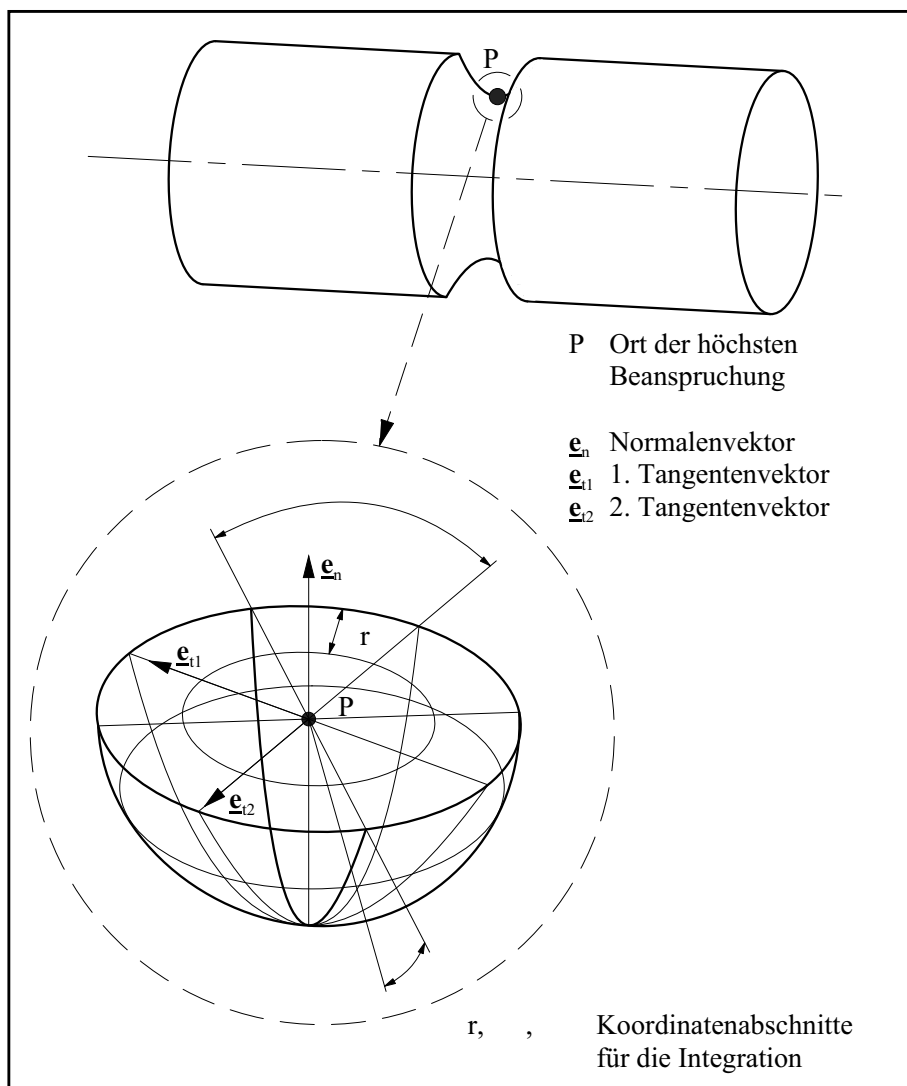


Abbildung 3.2: Definition des Volumenintegrals

Berechnung verwendet werden kann.

Die mit ihrem Teilvolumen ΔV gewichteten Mittelwerte werden über alle Segmente (k) aufsummiert und ergeben dividiert durch das Gesamtvolumen V des

Kugelausschnitts die gesuchte Größe $\bar{I}_{2a}(t_0)$:

$$\bar{I}_{2a}(t_0) = \frac{\sum_{(k)} \hat{I}_{2a,k}(t_0) \cdot \Delta V_k}{V} \quad (3.68)$$

Das „wahre“ Kugelausschnittsvolumen V_0 kann numerisch mit einer kleinen Fehlertoleranz bestimmt werden. Die bisher noch variable Anzahl der Unterteilung der Δr -, $\Delta \varphi$ - und $\Delta \gamma$ -Abschnitte ist dann geeignet, wenn das Volumen V mit V_0 übereinstimmt. Diese Vorgehensweise wurde sowohl für einen glatten Rundstab als auch für ein gekerbtes Bauteil mit unterschiedlichen Elementierungen erfolgreich überprüft. Für eine sinnvolle Auswertung sollte aber in jedem Fall das FEM-Netz im Bereich der höchsten Beanspruchung an den Integrationsradius angepaßt und die Verteilung der einzelnen FEM-Knoten möglichst gleichmäßig sein.

Im Folgenden werden die Einflüsse der Geometrie und des Werkstoffs auf die Mikrostützwirkung diskutiert und die Gültigkeit des neuen Volumenkonzeptes durch Vergleich mit dem Konzept aus [21] überprüft. Ein direkter Vergleich kann für einachsige Belastungen an glatten Stäben erfolgen. In **Tabelle C.1** im **Anhang C** sind die Stützziffern für Biege- und Torsionsbelastung glatter Rundstäbe aufgezeigt. Sowohl der Größen- als auch der Werkstoffeinfluß werden von dem neuen Konzept in geeigneter Weise berücksichtigt, womit der Vorschlag, die effektive Werkstoffstrukturlänge ρ_{eff} als Integrationsradius zu verwenden, bestätigt wird. Auffällig ist, daß alle Ergebnisse des neuen Konzeptes geringfügig kleiner sind. Der Unterschied liegt in der dritten Nachkommastelle und die mittlere relative Abweichung beträgt 0,31 %. Langfristig ist zu klären, ob ρ^* nicht etwas größer als ρ_{eff} angesetzt werden sollte.

In **Tabelle 3.3** sind die Stützziffern für die oben beschriebenen Kerbstäbe von *Dietmann* [6] unter Zugbelastung zusammengefaßt. Um die Ergebnisse des Volumenkonzeptes mit denen aus [21] besser vergleichen zu können, wird bei der Berechnung der modifizierten *von Mises*-Vergleichsspannung der angepaßte Wert K^2 (s.S. 52) für das Wechselfestigkeitsverhältnis eingesetzt. Die Mikrostützziffer $n_{V,mod.Mises}$ wird mit

$$n_{V,mod.Mises} = \frac{\hat{\sigma}_{V,mod.Mises}(t_0)}{\bar{\sigma}_{V,mod.Mises}(t_0)} = \frac{\sqrt{\hat{I}_{1a}^2(t_0) - k_a^2 \cdot \hat{I}_{2a}(t_0)}}{\sqrt{\frac{\hat{I}_{1a}^2(t_0)}{n_{V,1a}} - k_a^2 \cdot \frac{\hat{I}_{2a}(t_0)}{n_{V,2a}}}} \quad (3.69)$$

berechnet.

Der Vergleich von $n_{V,mod.Mises}$ und $n_{H,Mises}$ zeigt, daß mit dem Volumenkonzept, wie bereits bei glatten Stäben festgestellt, grundsätzlich geringere

Tabelle 3.3: Mikrostützziffern der Invarianten \hat{I}_{1a} , \hat{I}_{2a} und der modifizierten *von Mises*-Vergleichsspannung für verschiedene Kerbradien ρ berechnet mit Gl.(3.61 und 3.62)

| ρ | $n_{V,1a}$ | $n_{V,2a}$ | K^2 | $\bar{\sigma}_{V,mod.Mises}$ | $n_{V,mod.Mises}$ | $\bar{\sigma}_{H,Mises}$ | $n_{H,Mises}$ |
|-----------|------------|------------|-------|------------------------------|-------------------|--------------------------|---------------|
| nach [21] | | | | | | | |
| 8 | 1,002 | 0,998 | 2,116 | 120,9 | 1,001 | 119,6 | 1,012 |
| 4 | 1,013 | 0,977 | 2,180 | 139,8 | 1,014 | 138,3 | 1,025 |
| 2 | 1,031 | 0,971 | 2,238 | 172,0 | 1,033 | 169,4 | 1,049 |
| 1,5 | 1,046 | 0,966 | 2,256 | 189,2 | 1,048 | 186,3 | 1,065 |
| 1 | 1,070 | 0,963 | 2,274 | 218,3 | 1,073 | 213,8 | 1,095 |
| 0,5 | 1,149 | 0,964 | 2,291 | 276,6 | 1,147 | 268,1 | 1,183 |
| 0,25 | 1,314 | 1,006 | 2,292 | 338,9 | 1,287 | 325,2 | 1,342 |
| 0,11 | 1,831 | 1,254 | 2,292 | 395,2 | 1,628 | 383,2 | 1,679 |

Stützwirkungen berechnet werden. Übertragen auf die Vergleichsspannungs-Amplitude nach Gl.(3.65), ergibt sich für σ_{va} ein größerer Wert und damit eine geringere Lebensdauer, wenn dieselbe Makrostützziffer m_a vorausgesetzt wird. Das Konzept zu deren Berechnung wird ebenfalls modifiziert, was im nächsten Kapitel erläutert wird, so daß Gültigkeitsaussagen nur im Zusammenhang getroffen werden können. In **Kapitel 4.2.1** werden dafür die mit verschiedenen Lebensdauer-Bewertungskonzepten berechneten Wöhlerlinien den Versuchsergebnissen gekerbter Bauteile gegenübergestellt.

Der Einfluß der Werkstoffstrukturlänge ρ^* , des Kerbradius ρ und der absoluten Bauteilgröße d auf die Mikrostützziffern ist beispielhaft für einen zugbelasteten Rundstab mit Umlaufkerbe in den **Abbildungen 3.3** bis **3.5** dargestellt. Gegenübergestellt werden die Ergebnisse des Volumenkonzeptes mit dem angepaßten Wert K^2 und des Gradientenkonzeptes nach [21].

In **Abbildung 3.3** ist die Abhängigkeit der Mikrostützziffer von der Werkstoffstrukturlänge für verschiedene Kerbradien dargestellt. Die Werkstoffstrukturlänge wird in dem technisch relevanten Bereich von $\rho^* = 0,026mm$ bis $\rho^* = 0,2mm$ variiert, was ungefähr einer Zug-Druck-Wechselfestigkeit von $\sigma_W = 570N/mm^2$ bzw. $\sigma_W = 190N/mm^2$ entspricht. Großen Einfluß auf die Mikrostützwirkung hat die Werkstoffstrukturlänge für scharf gekerbte Bauteile, da die Fähigkeit, Spannungsspitzen durch plastische Verformung abzubauen, mit steigender Festigkeit abnimmt. Die in der Literatur angegebenen Näherungsbeziehungen für die Mikrostützziffern gehen alle von einer Proportionalität $n \sim \sqrt{\rho^*}$ für scharf gekerbte Bauteile aus. Demgegenüber wird von dem Volumenkonzept eine lineare Abhängigkeit der Mikrostützziffer $n_{V,mod.Mises}$ vom verwendeten Werkstoff vorhergesagt.

Alle Gradientenverfahren berücksichtigen die Kerbgeometrie bei der Berechnung der Mikrostützziffern mit Hilfe des bezogenen Spannungsgradienten. Es wird eine Proportionalität $n \sim \sqrt{\chi^*}$ angenommen. Von dem Volumenkonzept

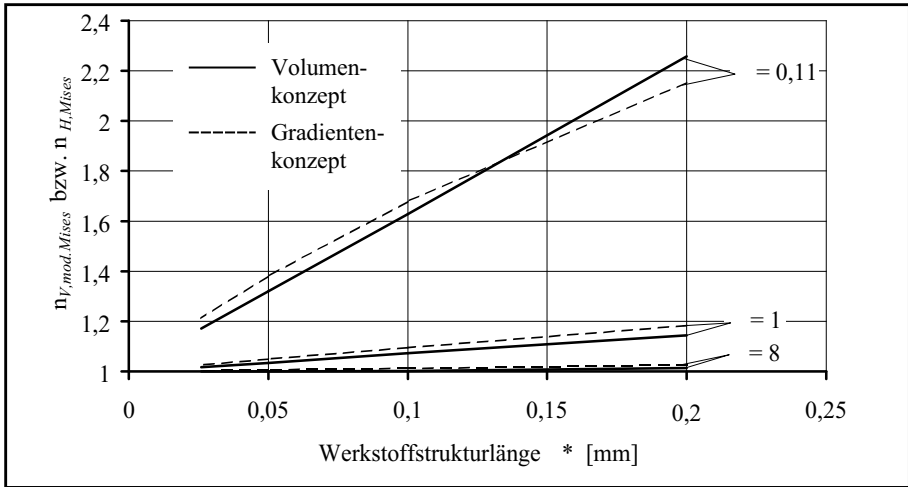


Abbildung 3.3: Vergleich der Mikrostützziffern $n_{V,mod.Mises}$ und $n_{H,Mises}$ für verschiedene Werkstoffstrukturlängen ρ^* und Kerbradien ρ bei konstanten Durchmessern $d = 8mm$ und $D = 16mm$

wird diese Abhängigkeit bestätigt. In **Abbildung 3.4** ist der Zusammenhang beispielhaft für einen zugbelasteten abgesetzten Rundstab dargestellt. Die einzelnen Werte sind für das ursprüngliche FEM-Modell ($d = 13,5mm$, $D = 18mm$ und $\rho = 0,25mm$) und die daraus abgeleiteten geometrisch ähnlichen Bauteile berechnet. Auch für diese Berechnung gilt, daß der Wert des Wechselspannungsverhältnisses jeweils angepaßt ist.

In **Abbildung 3.5** wird der Einfluß der Bauteilgröße dargestellt. Die einzelnen Werte können **Tabelle C.2** im **Anhang C** entnommen werden. Werden die bezogenen Spannungsgradienten (χ^*) nach [67] (s. **Abbildung 2.9** links) für die Berechnung der Mikrostützziffern verwendet, so ergibt sich für zugbelastete Stäbe keine Abhängigkeit von der absoluten Bauteilgröße, während die Verwendung von \bar{G} nach [61] (s. **Abbildung 2.9** rechts) zu einer sprunghaften Änderung von n für $d/D > 0,67$ führt. Mit dem Volumenkonzept wird die Unabhängigkeit von der Bauteilgröße bestätigt. Die sehr kleine Schwankung (vergl. **Tabelle C.2**) ist auf die numerische Berechnung des Integrals zurückzuführen.

Die bisherigen Ausführungen bezogen sich mit Ausnahme der glatten Stäbe auf zugbelastete Rundstäbe. Die weiteren Einflußfaktoren Stabform (Rund- oder Flachstab), Kerbform (abgesetzter oder „gekerbter“ Stab) und die Belastungsart (Zug-Druck-, Biege- und Torsionsbelastung) werden anhand der Ergebnisse aus **Tabelle 3.4** diskutiert. Alle Varianten sind für zwei unterschiedliche Kerb-

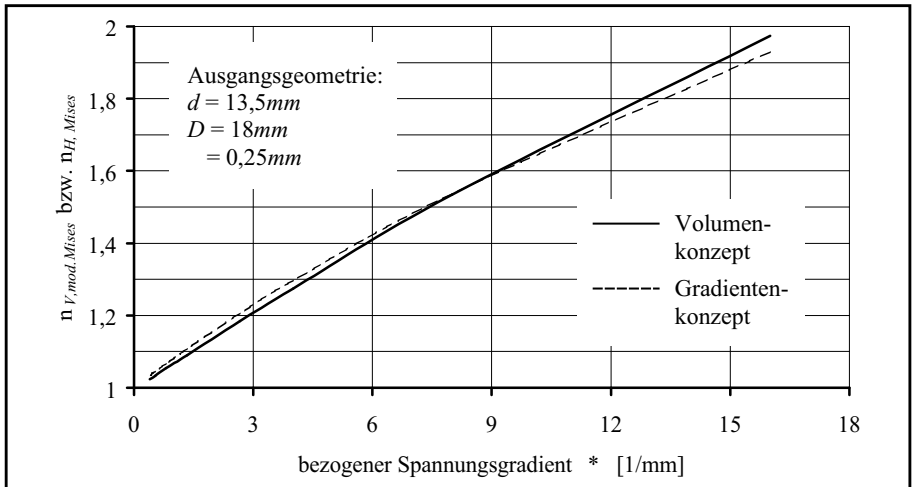


Abbildung 3.4: Vergleich der Mikrostützziffern $n_{V,mod.Mises}$ und $n_{H,Mises}$ für geometrisch ähnliche Rundstäbe unter Zugbelastung bei einer Werkstoffstrukturlänge $\rho^* = 0,17mm$

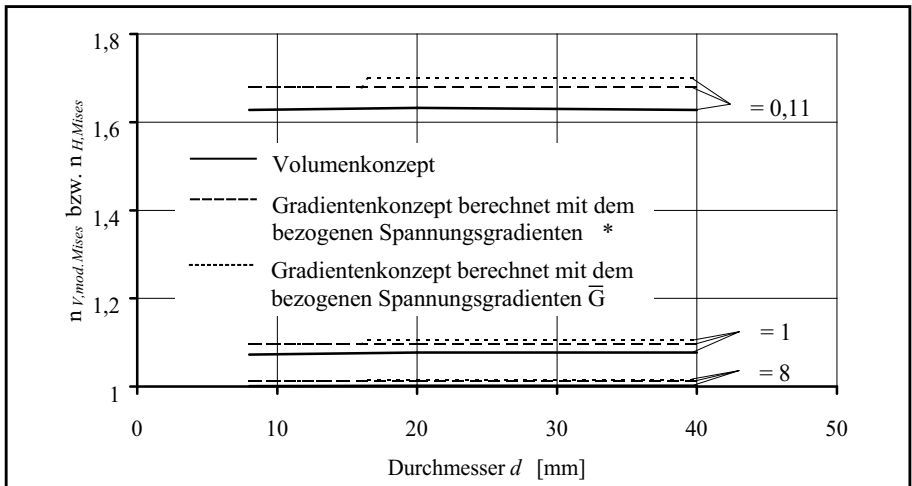


Abbildung 3.5: Vergleich der Mikrostützziffern $n_{V,mod.Mises}$ und $n_{H,Mises}$ für verschiedene Bauteildurchmesser d , D und Kerbradien ρ bei einer konstanten Werkstoffstrukturlänge $\rho^* = 0,1mm$

radien ($\rho = 2mm$ und $\rho = 0,25mm$) berechnet. Die weiteren Geometriewerte sind für jeden Kerbradius konstant. Die Berechnung erfolgt für eine Werkstoffstrukturlänge $\rho^* = 0,17mm$. Neben den Ergebnissen für die Stützziffern ist auch der Wert K^2 für das jeweilige angepaßte Wechselfestigkeitsverhältnis an-

gegeben.

Für die Ergebnisse gilt, daß die Größe der berechneten Stützwirkung nach dem Volumenkonzept für den Kerbradius $\rho = 2mm$ etwas kleiner ist als die nach dem Gradientenverfahren aus [21], während für $\rho = 0,25mm$ ein etwas uneinheitlicheres Bild entsteht. Die bezogenen Spannungsgradienten sowohl nach [67] als auch nach [61] unterscheiden grundsätzlich für eine Belastungsart nicht nach der Stabform. Diese Annahme wird durch das Volumenkonzept bestätigt. Für die Belastungsart Zug-Druck besteht nach [67] darüberhinaus auch keine Abhängigkeit von der Kerbform, während die TGL 19340 [61] unabhängig von der Belastungsart von einem 15% größeren bezogenen Spannungsgradienten für abgesetzte Stäbe ausgeht. Die Berechnungen mit dem Volumenkonzept ergeben hierfür ein anderes Verhalten. Für schwach gekerbte Bauteile bleibt $n_{V,modMises}$ bei Zug- bzw. Biegebelastung unabhängig von der Stab- und Kerbform nahezu

Tabelle 3.4: Mikrostützziffern der Invarianten \hat{I}_1, \hat{I}_2 und der modifizierten von Mises-Vergleichsspannung für verschiedene Belastungsarten, Stabformen und Kerbgeometrien berechnet mit Gl.(3.61 und 3.62)

| Rundstab mit Umlaufkerbe unter Zugbelastung | | | | | | | |
|---|------|----|-----------|-----------|-------|-------------------|--------------------|
| ρ | d | D | $n_{V,1}$ | $n_{V,2}$ | K^2 | $n_{V,mod.Mises}$ | $n_{H,Mises}$ [21] |
| 2 | 10 | 14 | 1,074 | 0,965 | 2,224 | 1,066 | 1,082 |
| 0,25 | 13,5 | 14 | 1,979 | 1,380 | 2,194 | 1,558 | 1,536 |

| Abgesetzter Rundstab unter Zugbelastung | | | | | | | |
|---|------|----|-----------|-----------|-------|-------------------|--------------------|
| ρ | d | D | $n_{V,1}$ | $n_{V,2}$ | K^2 | $n_{V,mod.Mises}$ | $n_{H,Mises}$ [21] |
| 2 | 10 | 14 | 1,092 | 0,978 | 2,178 | 1,070 | 1,082 |
| 0,25 | 13,5 | 14 | 2,120 | 1,699 | 2,154 | 1,520 | 1,536 |

| Flachstab mit Außenkerbe unter Zugbelastung | | | | | | | |
|---|------|----|-----------|-----------|-------|-------------------|--------------------|
| ρ | b | B | $n_{V,1}$ | $n_{V,2}$ | K^2 | $n_{V,mod.Mises}$ | $n_{H,Mises}$ [21] |
| 2 | 10 | 14 | 1,074 | 0,982 | 2,270 | 1,067 | 1,082 |
| 0,25 | 13,5 | 14 | 1,880 | 1,367 | 2,268 | 1,560 | 1,536 |

| Abgesetzter Flachstab unter Zugbelastung | | | | | | | |
|--|------|----|-----------|-----------|-------|-------------------|--------------------|
| ρ | b | B | $n_{V,1}$ | $n_{V,2}$ | K^2 | $n_{V,mod.Mises}$ | $n_{H,Mises}$ [21] |
| 2 | 10 | 14 | 1,087 | 0,998 | 2,270 | 1,073 | 1,082 |
| 0,25 | 13,5 | 14 | 1,946 | 1,549 | 2,270 | 1,519 | 1,536 |

Tabelle 3.4: Mikrostützziffern der Invarianten \hat{I}_1 , \hat{I}_2 und der modifizierten *von Mises*-Vergleichsspannung für verschiedene Belastungsarten, Stabformen und Kerbgeometrien berechnet mit Gl.(3.61 und 3.62)

| Rundstab mit Umlaufkerbe unter Biegebelastung | | | | | | | |
|--|------|----|-----------|-----------|-------|-------------------|--------------------|
| ρ | d | D | $n_{V,1}$ | $n_{V,2}$ | K^2 | $n_{V,mod.Mises}$ | $n_{H,Mises}$ [21] |
| 2 | 10 | 14 | 1,086 | 0,981 | 2,214 | 1,070 | 1,097 |
| 0,25 | 13,5 | 14 | 2,010 | 1,416 | 2,193 | 1,562 | 1,544 |
| Abgesetzter Rundstab unter Biegebelastung | | | | | | | |
| ρ | d | D | $n_{V,1}$ | $n_{V,2}$ | K^2 | $n_{V,mod.Mises}$ | $n_{H,Mises}$ [21] |
| 2 | 10 | 14 | 1,103 | 1,034 | 2,175 | 1,064 | 1,095 |
| 0,25 | 13,5 | 14 | 2,301 | 2,152 | 2,179 | 1,538 | 1,544 |
| Flachstab mit Außenkerbe unter Biegebelastung | | | | | | | |
| ρ | b | B | $n_{V,1}$ | $n_{V,2}$ | K^2 | $n_{V,mod.Mises}$ | $n_{H,Mises}$ [21] |
| 2 | 10 | 14 | 1,087 | 0,994 | 2,270 | 1,074 | 1,097 |
| 0,25 | 13,5 | 14 | 1,894 | 1,382 | 2,270 | 1,565 | 1,544 |
| Rundstab mit Umlaufkerbe unter Torsionsbelastung | | | | | | | |
| ρ | d | D | $n_{V,1}$ | $n_{V,2}$ | K^2 | $n_{V,mod.Mises}$ | $n_{H,Mises}$ [21] |
| 2 | 10 | 14 | 1,000 | 1,055 | 3 | 1,027 | 1,058 |
| 0,25 | 13,5 | 14 | 1,000 | 1,749 | 3 | 1,322 | 1,306 |
| Abgesetzter Rundstab unter Torsionsbelastung | | | | | | | |
| ρ | d | D | $n_{V,1}$ | $n_{V,2}$ | K^2 | $n_{V,mod.Mises}$ | $n_{H,Mises}$ [21] |
| 2 | 10 | 14 | 1,000 | 1,053 | 3 | 1,027 | 1,055 |
| 0,25 | 13,5 | 14 | 1,000 | 1,705 | 3 | 1,306 | 1,306 |

konstant. Die Werte für abgesetzte Stäbe sind zwar minimal größer, die Unterschiede fallen aber bereits in den Auflösungsbereich der numerischen Integration. Anders verhält es sich bei scharf gekerbten Bauteilen. Während für $\rho = 2mm$ die Zunahme der Stützwirkung der zweiten Invariante ungefähr gleich groß mit der der ersten Invariante ist, ist die Steigerung von $n_{V,2}$ bei $\rho = 0,25mm$ deutlich größer, so daß insgesamt die resultierende modifizierte *Mises*-Stützziffer sinkt. Verantwortlich hierfür ist die Lage des Maximums von \hat{I}_2 , das für abgesetzte Stäbe dichter an der Bauteiloberfläche liegt als für gekerb-

te Stäbe, so daß das Spannungsniveau insgesamt niedriger ist. Die Abhängigkeit von der Kerbform wird für biegebelastete Stäbe auch von [21] vorhergesagt, mit dem Unterschied, daß der berechnete Einfluß deutlich geringer ist. Die Ergebnisse des Volumenkonzepts bestätigen auch die Annahme, daß biegebelastete Stäbe eine geringfügig größere Stützwirkung erfahren als zugbelastete Stäbe.

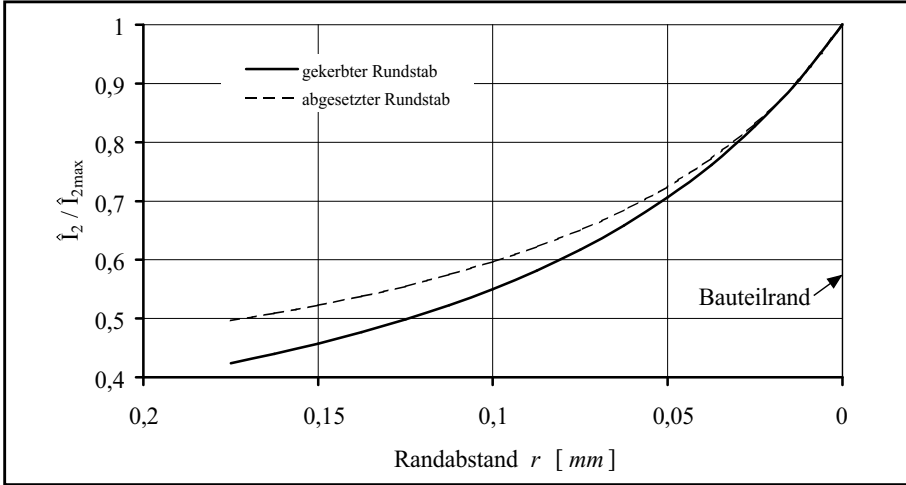


Abbildung 3.6: Auf den Maximalwert bezogener Verlauf der zweiten Invariante für einen gekerbten und einen abgesetzten Rundstab unter Torsionsbelastung ($\rho = 0,25\text{mm}$, $d = 13,5\text{mm}$ und $D = 14\text{mm}$)

Für die Belastungsart Torsion wird mit beiden Konzepten gegenüber Zug bzw. Biegung eine geringere Stützwirkung berechnet. Der Einfluß der Kerbform wird von dem Volumenkonzept für scharf gekerbte Bauteile höher bewertet. Zur Erklärung ist in **Abbildung 3.6** der auf den Maximalwert bezogene Verlauf der zweiten Invariante senkrecht zur Oberfläche ins Bauteilinnere dargestellt. Die Kurven basieren auf den Ergebnissen zweier FEM-Berechnungen für einen gekerbten und einen abgesetzten Rundstab. Durch eine geeignete Elementierung der FEM-Modelle liegen Knoten und damit die Ergebnisse jeweils direkt in Richtung des steilsten Gradienten vor. Es soll hervorgehoben werden, daß der Punkt der höchsten Beanspruchung abgesetzter Stäbe nicht am Übergang vom kleinsten Querschnitt zum Radius liegt, sondern sich kurz dahinter im Radius befindet.

Die Werte für die bezogenen Spannungsgradienten des gekerbten und des abgesetzten Rundstabes unterscheiden sich sowohl für die Ergebnisse der FEM-Berechnung ($\chi_{\hat{\sigma}_{xy,gek}}^* = 3,867\text{mm}^{-1}$ und $\chi_{\hat{\sigma}_{xy,abg}}^* = 3,856\text{mm}^{-1}$) als auch die nach [67] berechneten Werte ($\chi_{\hat{\sigma}_{xy,gek}}^* = 4,148\text{mm}^{-1}$ und $\chi_{\hat{\sigma}_{xy,abg}}^* =$

4,145mm⁻¹) kaum voneinander. Die Mikrostützziffer $n_{H,Mises}$ ist deshalb für die beiden Kerbformen gleich groß.

Der Verlauf der bezogenen zweiten Invariante des abgesetzten Stabes ist gegenüber dem des gekerbten Stabes flacher (**Abbildung 3.6**). Demzufolge werden mit dem Volumenkonzept auch etwas kleinere Stützziffern für abgesetzte Rundstäbe unter Torsionsbelastung berechnet. Die Formzahlen betragen $\alpha_{kt,gek.} = 1,52$ für den Rundstab mit Umlaufkerbe und $\alpha_{kt,abg.} = 1,37$ für den abgesetzten Rundstab.

Die Stützziffer der dritten Invariante der Vergleichsspannungs-Amplitude $n_{V,12a}$ wird mit Gl.(3.63) berechnet. Die Bestimmung ist für $k_{bN} \neq 0$ dann erforderlich, wenn für den Punkt der Lebensdauervorhersage der resultierende Spannungstensor einer mehrachsigen Belastung zueinander phasenverschoben schwingende

- Normal- und Schubspannungskomponenten und/oder
- mehrere Schubspannungskomponenten und/oder
- drei Normalspannungskomponenten

enthält. Die Spannungstensoren der schwingenden Anteile $\hat{\underline{\underline{S}}}_{a,i}$ der einzelnen Belastungen i werden in jedem FEM-Knoten zu einem resultierenden Spannungstensor $\hat{\underline{\underline{S}}}_a$ mit den Gleichungen Gl.(3.2 - 3.4) überlagert, dessen Komponenten dann verschiedene Zeitfunktionen besitzen. Die Integration von \hat{J}_{12a} erfolgt mit den Spannungen und Phasenverschiebungen von $\hat{\underline{\underline{S}}}_a$. In den **Tabelle C.3** bis **C.5** im **Anhang C** sind die Stützziffern $n_{V,12a}$ beispielhaft für einen gekerbten und einen glatten Rundstab aufgeführt.

Den „einfachsten“ Belastungsfall stellt die Überlagerung einer Zug- Druck- bzw. Biegebelastung mit einer Torsionsbelastung dar. Der Beanspruchungszustand an der Oberfläche ist zweiachsig, womit sich die dritte Invariante vereinfacht:

$$\hat{J}_{12a} = |\hat{\sigma}_{xya} \cdot [\hat{\sigma}_{xxa} \cdot \sin(\delta_{xx} - \delta_{xy}) - \hat{\sigma}_{yya} \cdot \sin(\delta_{yy} - \delta_{xy})]| \quad (3.70)$$

Die Werte in **Tabelle C.3** zeigen, daß die Stützziffern $n_{V,12a}$ weder von dem Verhältnis der Belastungshöhe noch von der Phasenverschiebung δ_{xy} bei gleicher Werkstoffstrukturlänge und gleichem Kerbradius abhängig sind. Identisches Verhalten zeigen die Ergebnisse für einen glatten und einen gekerbten Rundstab unter Biegung und Torsion (s. **Tabelle C.4** die ersten zwei Ergebnisse und **Tabelle C.5** die ersten drei Ergebnisse). Wie zu erwarten hat der

Kerbradius ρ einen großen Einfluß auf die Größe der Stützziffer.

Wird dieser Belastungskombination aus Biegung und Torsion zusätzlich noch eine phasenverschobene Zug-Druckbelastung überlagert, so werden die Ergebnisse der Stützziffer auch abhängig vom jeweiligen Spannungsverhältnis und den jeweiligen Phasenverschiebungen. Grund hierfür sind die unterschiedlichen Spannungsverteilungen der beiden überlagerten Normalspannungskomponenten. Die resultierende Normalspannungsamplitude $\hat{\sigma}_{xxa}$ und deren Phasenlage δ_{xx} können für einen glatten Rundstab mit dem Radius r_a und der Höhenkoordinate y^G analytisch nach Gl.(3.3) und Gl.(3.4) berechnet werden^H:

$$\hat{\sigma}_{xxa} = \sqrt{\hat{\sigma}_{xxa,Bieg.}^2 \cdot \left(\frac{y}{r_a}\right)^2 + \hat{\sigma}_{xxa,Zug}^2 + 2 \cdot \hat{\sigma}_{xxa,Zug} \cdot \hat{\sigma}_{xxa,Bieg.} \cdot \left(\frac{y}{r_a}\right) \cdot \cos(\delta_{xx,Zug} - \delta_{xx,Bieg.})} \quad (3.71)$$

$$\delta_{xx} = \arctan \left(\frac{\hat{\sigma}_{xxa,Bieg.} \cdot \left(\frac{y}{r_a}\right) \cdot \sin \delta_{xx,Bieg.} + \hat{\sigma}_{xxa,Zug} \cdot \sin \delta_{xx,Zug}}{\hat{\sigma}_{xxa,Bieg.} \cdot \left(\frac{y}{r_a}\right) \cdot \cos \delta_{xx,Bieg.} + \hat{\sigma}_{xxa,Zug} \cdot \cos \delta_{xx,Zug}} \right) \quad (3.72)$$

Das Verhältnis der resultierenden Normalspannungsamplituden $\hat{\sigma}_{xxa}$ ist für zwei unterschiedliche Spannungsverhältnisse $\hat{\sigma}_{xxa,Zug}/\hat{\sigma}_{xxa,Bieg.}$ über der Höhenkoordinate y nicht konstant, was auch für zwei unterschiedliche Phasenverschiebungen $\delta_{xx,Zug}$ gilt. Als Folge dieser Abhängigkeiten muß die Mikrostützwirkung der dritten Invariante bei einem Dauerfestigkeitsnachweis mehrfrequent und phasenverschoben belasteter gekerbter Bauteile für jede Frequenz einzeln berechnet werden.

Hahn schlägt in seiner Arbeit [21] vor, die Stützziffer^I

$$\begin{aligned} n_{H,3a}^2 &= n_{H,1a} \cdot n_{H,2a} \\ &\hat{=} n_{V,12a} \end{aligned} \quad (3.73)$$

^GDie Höhenkoordinate y ist der radiale Abstand des betrachteten Punktes zum Wellenmittelpunkt.

^HDie Berechnung der resultierenden Phasenlage δ_{xx} erfolgt unter Beachtung der Quadrantenbeziehung.

^IIn [21] wird sowohl die Stützziffer als auch die dritte Invariante der Vergleichsspannungsamplitude selbst im Gegensatz zu dieser Arbeit mit dem Index 3 geschrieben.

mit dem Produkt der Stützziffern der ersten und zweiten Invariante abzuschätzen. Der Vergleich der Ergebnisse in den **Tabellen C.3 - C.5** macht deutlich, daß diese Abschätzung zu kleine Werte liefert, was, wie bereits oben erläutert, zu höheren Lebensdauervorhersagen führt. Als grobe Näherung für $n_{H,3a}^2$ sollte deshalb sicherheitshalber das Quadrat des Produktes aus $n_{H,1a}$ und $n_{H,2a}$

$$n_{H,3a}^2 = (n_{H,1a} \cdot n_{H,2a})^2$$

verwendet werden, um Lebensdauern vorherzusagen, die tendenziell auf der sicheren Seite liegen.

Für zusammengesetzte Belastungen wird von *Mertens* [40] vorgeschlagen, den maßgeblichen bezogenen Spannungsgradienten gewichtet mit den Kerbspannungen zu mitteln. Für einen beispielsweise mit Zug-Druck und Biegung belasteten Stab gilt somit:

$$\chi_{\hat{I}_1} = \frac{\chi_{\hat{I}_{1,Zug}} \cdot \hat{\sigma}_{xx,Zug} + \chi_{\hat{I}_{1,Biegung}} \cdot \hat{\sigma}_{xx,Biegung}}{\hat{\sigma}_{xx,Zug} + \hat{\sigma}_{xx,Biegung}} . \quad (3.74)$$

Die hiermit berechneten Stützziffern nach Gl.(2.53) sind in **Tabelle C.6** den Ergebnissen des Volumenkonzeptes gegenübergestellt. Es folgen in **Tabelle C.7** die Stützziffern für die einzelnen Belastungsarten, für die bei Berechnungen mit dem Volumenkonzept das angepaßte Wechselfestigkeitsverhältnis K^2 verwendet wird.

Da in [40] und [21] keine Angaben zum Zeitpunkt der Berechnung der Mikrostützziffern angegeben sind, werden die Berechnungen in Anlehnung an die Vorgehensweise in dieser Arbeit zum Zeitpunkt der maximalen *von Mises*-Vergleichsoberspannung durchgeführt:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{vo,Mises} &= \max [\sigma_{vo,Mises} (t)] \\ &= \max \left[\sqrt{\hat{I}_{1o}^2 (t) - 3 \cdot \hat{I}_{2o} (t)} \right] \\ &= \sigma_{vo,Mises} (t_0) . \end{aligned} \quad (3.75)$$

Der Vergleich der Ergebnisse mit denen des Volumenkonzeptes (s. **Tabelle C.6**) zeigt für die Mikrostützziffern $n_{V,mod.Mises}$ und $n_{H,Mises}$ eine gute Übereinstimmung, womit einerseits die Annahme zum Zeitpunkt der Berechnung Gl.(3.75) –die mit Gl.(3.48 und 3.49) bzw. Gl.(3.75) berechneten Zeitpunkte stimmen nicht grundsätzlich überein– und andererseits die Näherungsbeziehung Gl.(3.74) bestätigt wird. Die zum Teil großen Unterschiede in den elastisch gestützten Vergleichsspannungen sind auf das Wechselfestigkeitsverhältnis k_a^2 zurückzuführen, das für die Ergebnisse der zusammengesetzten Belastungen

nicht angepaßt ist.

Tabelle C.7 ist zu entnehmen, daß die Ergebnisse der beiden Konzepte für die „einfachen“, Belastungsfälle Zug-Druck, Biegung und Torsion mit dem angepaßten Wechselfestigkeitsverhältnis K^2 wiederum sehr gut sowohl in den elastisch gestützten Vergleichsspannungen $\bar{\sigma}_{V,mod.Mises}$ bzw. $\bar{\sigma}_{H,Mises}$ als auch in deren Stützziffern $n_{V,mod.Mises}$ bzw. $n_{H,Mises}$ übereinstimmen.

3.3.2 Makrostützwirkung

Während die Mikrostützwirkung über den gesamten Lebensdauerbereich, also Dauer- und Zeitfestigkeit, wirksam ist, gewinnt die Makrostützwirkung erst im Zeitfestigkeitsbereich an Bedeutung. Großräumige Spannungsumlagerungen hervorgerufen durch ungleichmäßige Spannungsverteilungen werden erst bei Beanspruchungshorizonten oberhalb der Streck- bzw. der zyklischen Streckgrenze aktiviert. Um aufwendigere elastisch-plastische Berechnungen zu ihrer Erfassung zu vermeiden, stehen dem Konstrukteur zahlreiche in **Kapitel 2.2.1** vorgestellte Konzepte zur Verfügung. Ziel dieser Verfahren ist es, die örtliche Spannung und Dehnung durch Einführung einer „leicht“ zu bestimmenden Stützziffer zu berechnen.

Während i.a. zur Bewertung mehrachsiger Belastungen die *von Mises*-Spannung als Vergleichsspannungs-Hypothese verwendet wird, wird in dieser Arbeit die bereits in **Kapitel 3.3.1** vorgestellte modifizierte *von Mises*-Vergleichsspannung vorgeschlagen. Der Zeitpunkt, zu dem die Makrostützziffer berechnet werden soll, wird durch das Maximum der elastisch gestützten, modifizierten *von Mises*-Vergleichsoberspannung

$$\begin{aligned}
 \bar{\sigma}_{o,mod.Mises}(t_0) &= \max[\bar{\sigma}_{o,mod.Mises}(t)] \\
 &= \max \left[\sqrt{\frac{\hat{I}_{1o}^2(t)}{n_{V,1o}} - k_a^2 \cdot \frac{\hat{I}_{2o}(t)}{n_{V,2o}}} \right] \\
 &\implies t_0
 \end{aligned} \tag{3.76}$$

definiert^J, da davon auszugehen ist, daß die maßgebliche Spannungsumlagerung zu diesem Zeitpunkt eingeleitet wird. Der Ort der Lebensdauerberechnung wurde bereits im obigen Kapitel festgelegt. Zur Bestimmung der Makrostützziffern der Amplitude m_a und der Oberspannung m_o wird das Konzept aus [21] modifiziert.

^JMit t_0 werden in dieser Arbeit verschiedene feste Zeitpunkte beschrieben, die sich aus der jeweiligen Bestimmungsgleichung ergeben.

An mehreren Stellen wurde bereits auf die Schwierigkeit bei der Definition eines geeigneten Querschnitts und der zugehörigen Nennspannungen für gekerbte Bauteile hingewiesen. Da der Vorschlag von *Hahn* ebenfalls die Kenntnis der Nennspannung und eines Querschnitts voraussetzt, werden andere Wege einerseits zur Berechnung des unteren Niveaus der modifizierten *Neuber*-Hyperbel und andererseits zur Bestimmung der globalen Fließbehinderung φ auf der Grundlage der Ergebnisse einer FEM-Berechnung vorgestellt.

Die Makrostützziffer der Ausschlagspannung

$$m_a = \frac{\bar{\sigma}_{a,mod.Mises}(t_0)}{\sigma_a^*(t_0)} \quad (3.77)$$

wird als der Quotient der elastisch gestützten, modifizierten *von Mises*-Vergleichsausschlagspannung $\bar{\sigma}_{a,mod.Mises}$ und der „fiktiven“ Ausschlagspannung σ_a^* zum Zeitpunkt t_0 definiert. Die Spannung $\bar{\sigma}_{a,mod.Mises}$ wird mit den Invarianten nach Gl.(3.46) gebildet, während σ_a^* mit Hilfe der modifizierten *Neuber*-Hyperbel Gl.(2.60) und der globalen Fließbehinderung φ entsprechend **Abbildung 2.10** und der in **Kapitel 2.2.1** Seite 29 beschriebenen Vorgehensweise berechnet wird.

Im Gegensatz zu *Hahn* [21], der für die Berechnung der effektiven Vergleichsmittelspannung σ_{vm} eine Makrostützziffer der Mittelspannung m_m (Gl.(2.64)) einführte, wird der konsequente Weg der Verwendung einer Makrostützziffer der Oberspannung m_o vorgeschlagen, da die effektiv wirksame Vergleichsmittelspannung als Differenz der Hauptober- und Hauptausschlagspannung definiert ist (s. **Kapitel 3.4**). m_o wird in Analogie zur Makrostützziffer der Ausschlagspannung

$$m_o = \frac{\bar{\sigma}_{o,mod.Mises}(t_0)}{\sigma_o^*(t_0)} \quad (3.78)$$

definiert. Die Berechnung von $\bar{\sigma}_{o,mod.Mises}$ erfolgt mit den Invarianten nach Gl.(3.47).

Beide Berechnungen setzen jeweils die Kenntnis des unteren Niveaus der modifizierten *Neuber*-Hyperbel und der globalen Fließbehinderung voraus. In den beiden folgenden Abschnitten wird gezeigt, wie auf der Basis der Ergebnisse einer FEM-Berechnung diese Größen unabhängig von der Bauteilgeometrie und den Belastungsarten ermittelt werden können.

3.3.2.1 Unteres Niveau der modifizierten *Neuber*-Hyperbel

Hahn [21] stellte bei der Nachrechnung experimentell aufgenommener zyklischer Fließkurven fest, daß bei großen Bauteilen nicht der gesamte Querschnitt für die Spannungsumlagerung aktiviert werden kann. Er formulierte deshalb

einen von der Belastungsart und der Stabform abhängigen wirksamen Formbeiwert β als Verhältnis des teilplastischen Zustands zum elastischen. Die Tiefe der plastischen Randzone gibt er mit $\rho_{pl} = 3mm$ an. Das untere Niveau der modifizierten *Neuber*-Hyperbel kann dann mit der Nennspannung und dem wirksamen Formbeiwert berechnet werden.

Um dagegen bei der Bewertung von FEM-Ergebnissen unabhängig von der Nennspannung, den Belastungsarten und der (Kerb)-Geometrie zu sein, wird vorgeschlagen, im Volumenkonzept das untere Niveau der modifizierten *Neuber*-Hyperbel durch Einführung von invariantenbezogenen Stützziffern $n_{1a,makro}$ und $n_{2a,makro}$ bzw. $n_{1o,makro}$ und $n_{2o,makro}$

$$\check{\sigma}_{a,modMises} = \sqrt{\frac{\hat{I}_{1a}^2(t_0)}{n_{1a,makro}} - k_a^2 \cdot \frac{\hat{I}_{2a}(t_0)}{n_{2a,makro}}} \quad \text{bzw.} \quad (3.79)$$

$$\check{\sigma}_{o,modMises} = \sqrt{\frac{\hat{I}_{1o}^2(t_0)}{n_{1o,makro}} - k_a^2 \cdot \frac{\hat{I}_{2o}(t_0)}{n_{2o,makro}}} \quad (3.80)$$

zu definieren. Die Stützziffern werden ähnlich wie die der Mikrostützwirkung berechnet Gl.(3.61 und 3.62), mit dem Unterschied, daß der Integrationsradius gleich der Tiefe der plastischen Randzone ρ_{pl} ist. Außerdem wird nicht über das gesamte sich in der Kugel befindliche Bauteilvolumen integriert, sondern nur über eine Halbkugel ($90^\circ \leq \gamma \leq 180^\circ$), deren Normalenvektor senkrecht zur Oberfläche steht. Mit dieser Beschränkung soll erreicht werden, daß niedrig belastete Bereiche, die für die Stützwirkung nicht aktiviert werden können, nicht bei der Berechnung der Stützziffern berücksichtigt werden.

In den **Abbildungen 3.7** und **3.8** sind die mit dem vorgestellten Konzept berechneten zyklischen Fließkurven den Versuchsergebnissen von *Kloos*, *Kaiser* und *Friedrich* [32] und *Hatanaka*, *Shimizu* und *Nagae* [26] gegenübergestellt. Für den Wert der plastischen Randzone und damit des Integrationsradius wird wie in [21] $\rho_{pl} = 3mm$ vorgeschlagen. Der Vergleich zeigt, daß der Größeneinfluß unabhängig vom Werkstoff richtig erfaßt wird. Für den niederfesten Stahl in **Abbildungen 3.8** werden allerdings etwas zu niedrige Verläufe berechnet. Gleiche Dehnungsamplituden ϵ_a vorausgesetzt, werden mit dem neuen Konzept etwas kleinere Nennspannungsamplituden S_a vorhergesagt. In Bezug auf die Lebensdauerberechnung führt dies zu Aussagen auf der „sicheren“ Seite.

Der Einfluß der Makrostützwirkung auf die Lebensdauer eines Bauteils nimmt, wie bereits oben erwähnt, von der Dauerfestigkeit zur Kurzzeitfestigkeit zu. Eine Über- oder Unterschätzung des möglichen Spannungsabbaus auf das untere

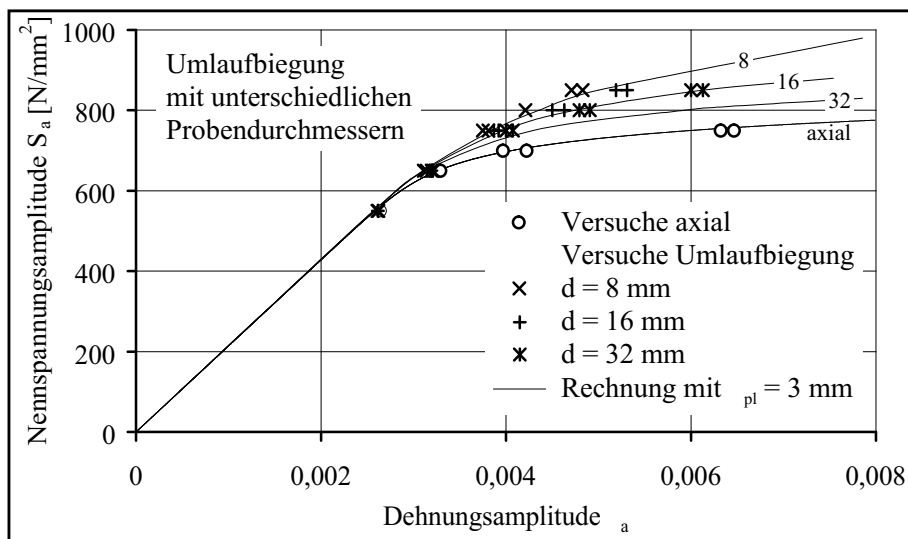


Abbildung 3.7: Vergleich experimenteller [32] und gerechneter zyklischer Fließkurven für den Werkstoff 42CrMo4V

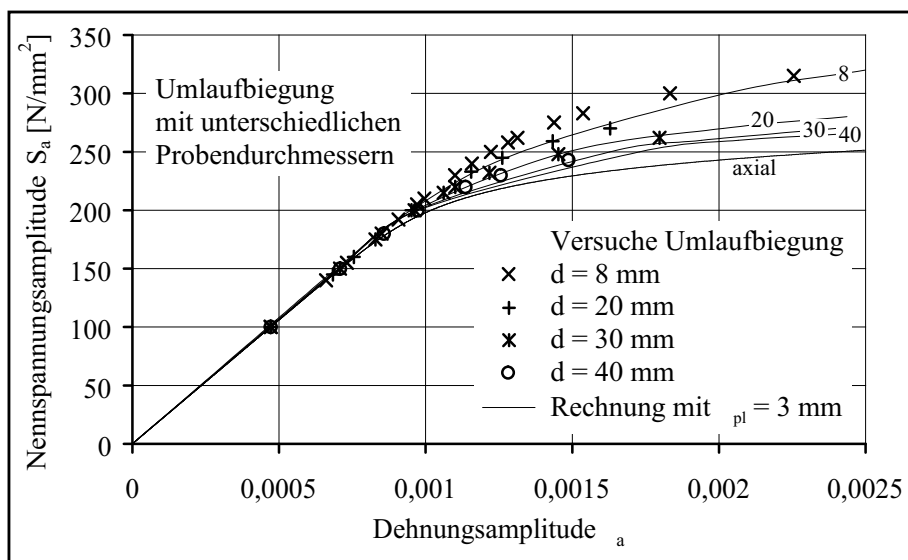


Abbildung 3.8: Vergleich experimenteller [26] und gerechneter Fließkurven eines niederfesten Stahls

Niveau der modifizierten *Neuber*-Hyperbel hat dabei einen geringen Einfluß auf die ertragbare Lastwechselzahl. Erst im Kurzzeitfestigkeitsbereich wird der

Unterschied deutlich.

In **Abbildung 3.9** ist beispielhaft für einen zugbelasteten Rundstab mit tiefer Umdrehungskerbe dieser Einfluß aufgezeigt. Die durchgezogene Linie ist das Ergebnis des hier vorgestellten Konzeptes. Das untere Niveau der modifizierten *Neuber*-Hyperbel beträgt $\bar{\sigma}_{a,mod.Mises} = 129,7 N/mm^2$ bei einer Zugennspannung von $S_a = 100 N/mm^2$.

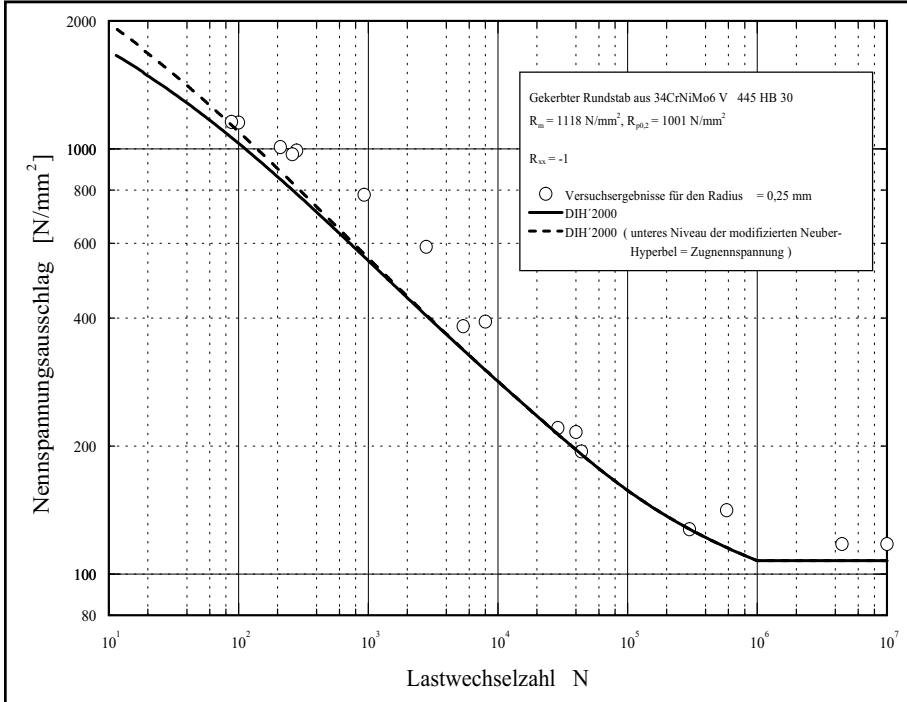


Abbildung 3.9: Einfluß des unteren Niveaus der modifizierten *Neuber*-Hyperbel auf die ertragbare Lastwechselzahl für einen zugbelasteten Rundstab mit Umdrehungskerbe und Versuchsergebnisse von *Liebrich* [34]

Da für eine reine Zug-Druckbelastung auf Grund der homogenen Spannungsverteilung keine Bauteilreserven durch plastische Umlagerungen aktiviert werden können, entspricht die Nennspannung S_a dem unteren Niveau der modifizierten *Neuber*-Hyperbel. Werden die Werte für die beiden Stützziffern $n_{1a,makro}$ und $n_{2a,makro}$ so angepaßt, daß die Berechnung von $\bar{\sigma}_{a,mod.Mises}$ gerade die Nennspannung S_a ergibt, ist die gestrichelte Linie das Ergebnis der Lebensdauerberechnung. Erst für Lastwechselzahlen $N < 600$ weicht das neue Konzept von der theoretischen Kurve ab und befindet sich mit der Vorhersage auf der

„sicheren“ Seite.

Für einen biege- und torsionsbelasteten Rundstab sind die Ergebnisse in den **Abbildungen 3.10** (Biegung) und **3.11** (Torsion) zusammen mit den Versuchsergebnissen von *Pötter* und *Zenner* [50] dargestellt.

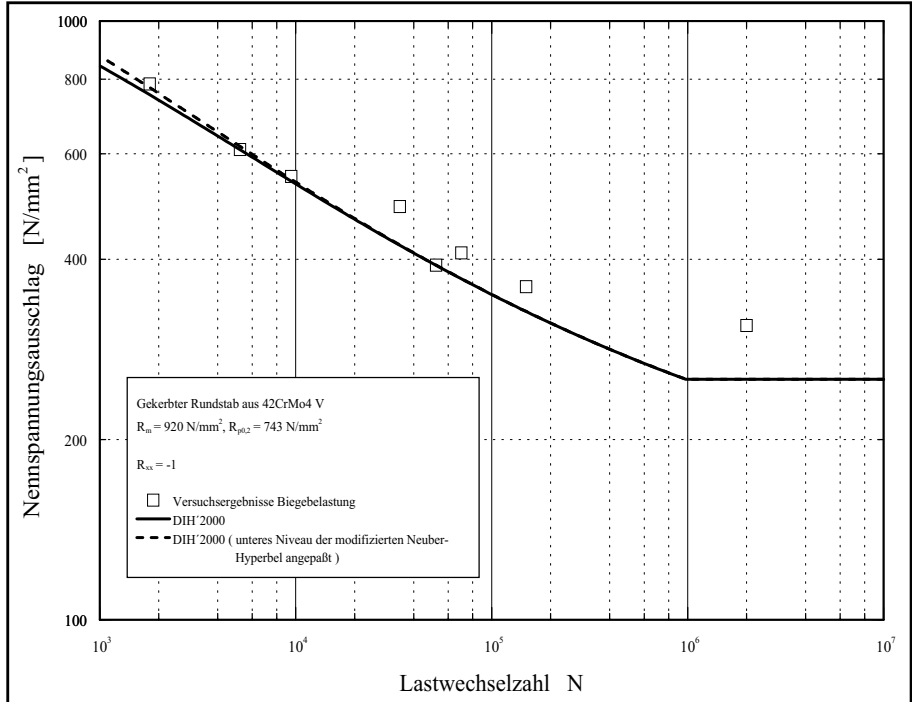


Abbildung 3.10: Einfluß des unteren Niveaus der modifizierten *Neuber*-Hyperbel auf die ertragbare Lastwechselzahl für einen gekerbten, biegebelasteten Rundstab und Versuchsergebnisse von *Pötter* und *Zenner* [50]

Wiederum eine Nennspannung von S_a bzw. $T_a = 100 \text{ N/mm}^2$ vorausgesetzt, ergibt sich $\check{\sigma}_{a,mod.Mises} = 88,6 \text{ N/mm}^2$ für die Biegebelastung und $\check{\sigma}_{a,mod.Mises} = 119,3 \text{ N/mm}^2$ für die Torsionsbelastung. Mit dem Konzept aus [21] wird dagegen ein Wert von $\check{\sigma}_{a,Mises} = 75,3 \text{ N/mm}^2$ für Biegung berechnet. Auf diesen Wert wurde das untere Niveau der modifizierten *Neuber*-Hyperbel zum Vergleich angepaßt und die Wöhlerlinie berechnet (s. **Abbildung 3.10**). Eine Abweichung ist ungefähr ab $N < 1000$ festzustellen, was auch für die Torsionsbelastung in **Abbildung 3.11** gilt. Für die in [50] angegebene Kerbformzahl $\alpha_{kt} = 1,6$ ergibt sich mit den Formeln von *Hahn* ein unteres Niveau

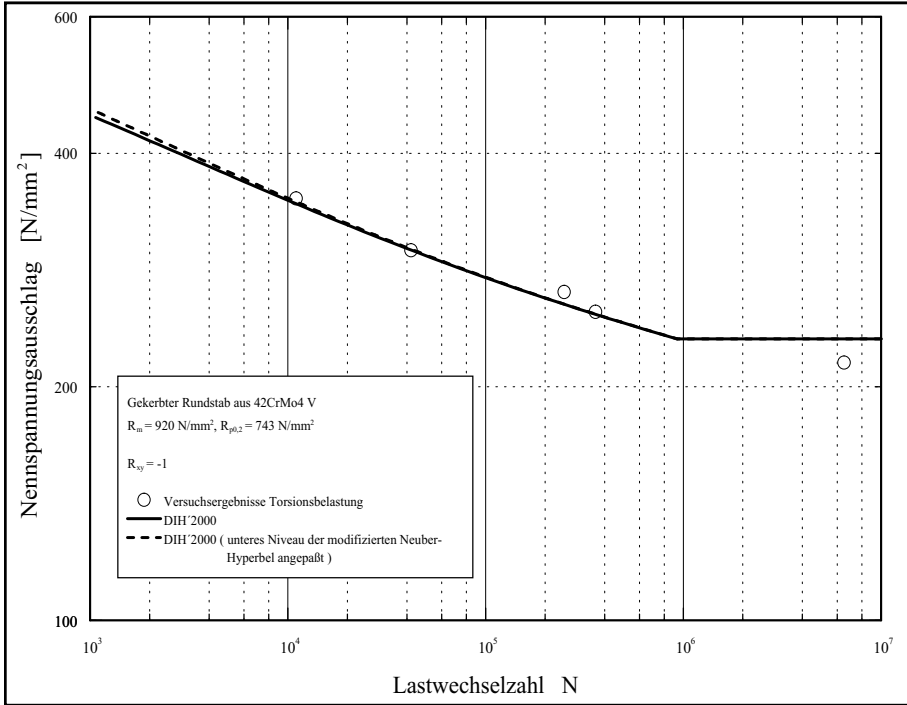


Abbildung 3.11: Einfluß des unteren Niveaus der modifizierten *Neuber*-Hyperbel auf die ertragbare Lastwechselzahl für einen torsionsbelasteten Rundstab mit Umdrehungskerbe und Versuchsergebnisse von *Pötter* und *Zenner* [50]

von $\check{\sigma}_{a,Mises} = 143,7 \text{ N/mm}^2$, das deutlich über dem neu berechneten Wert liegt. Wird hingegen die Kerbformzahl $\alpha_{kt} = 1,489$, die sich aus den Ergebnissen der FEM-Berechnung ergibt, und statt der *von Mises*- die mit k_a^2 modifizierte *von Mises*-Vergleichsspannung verwendet, beträgt das untere Niveau $\check{\sigma}_{a,mod.Mises} = 111,3 \text{ N/mm}^2$ und ist damit wiederum etwas kleiner als das Ergebnis des Volumenkonzeptes. Die für die beiden unteren Niveaus berechneten Wöhlerlinien sind in der obigen Abbildung dargestellt.

Die drei Beispiele verdeutlichen, daß mit dem Volumenkonzept gegenüber dem Konzept von [21] etwas höhere untere Niveaus der modifizierten *Neuber*-Hyperbel bestimmt werden. Da der Einfluß sich erst im Kurzzeitfestigkeitsbereich $N < 1000$ auswirkt und die Lebensdauervorhersage für gleiche Nennspannungsamplituden dann zu etwas kleineren ertragbaren Lastwechselzahlen führt, wird vorgeschlagen, die Tiefe der plastischen Randzone $\rho_{pl} = 3 \text{ mm}$ beizubehalten.

3.3.2.2 Fließbehinderung an Kerben

Während die Bestimmung des „exakten“ Wertes des unteren Niveaus der modifizierten *Neuber*-Hyperbel keinen großen Einfluß auf die Lebensdauervorhersage hat, muß der festigkeitssteigernde Effekt der Mehrachsigkeit, deren Ursache in **Kapitel 2.2** erläutert wurde, in jedem Fall berücksichtigt werden, da ansonsten die Lebensdauer viel zu konservativ abgeschätzt wird (vergl. **Abbildung 3.13**).

Zur Bestimmung der maßgeblichen Fließbehinderung φ_{global} werden die Überlegungen von *Dietmann* und *Hahn* aufgegriffen. Die lokale Fließbehinderung φ_{lokal} wurde bereits mit Gl.(2.62) definiert:

$$\varphi_{lokal} = \frac{\sigma_{1,NSH}}{\sigma_{v,MH}}.$$

Der Ort, an dem die lokale Fließbehinderung gleich der maßgeblichen ist, wird durch das Maximum der Radialspannung innerhalb der mit ρ_{pl} begrenzten Randzone definiert. Die radiale Richtung ist durch den Normalenvektor zur Tangentialfläche an der Oberfläche im Punkt der Lebensdauerberechnung definiert und der Zeitpunkt, zu dem die Berechnung erfolgen soll, wurde mit Gl.(3.76) bereits festgelegt. Für die Berechnung von φ_{global} wurde im Hinblick auf den Widerspruch für eine reine Torsionsbelastung eine Unabhängigkeit von der Belastungsart gefordert. Dies wird dadurch erreicht, daß die lokale Fließbehinderung am Ort der maximalen Radialspannung auf den lokalen Wert im Punkt der Lebensdauerberechnung bezogen wird:

$$\varphi_{global,FEM} = \frac{\varphi_{lokal}|_{(\sigma_{rr,max}; r \leq \rho_{pl})}}{\varphi_{lokal}|_{(r=0)}} \quad (3.81)$$

Darüber hinaus wird durch den Bezug sichergestellt, daß die Auswirkungen einer global mehrachsigen Belastung, die i.d.R. eine rechnerisch höhere lokale Fließbehinderung zur Folge hat, nicht zweimal in der Makrostützziffernberechnung berücksichtigt wird; und zwar einmal in der globalen Fließbehinderung und gleichzeitig in der Vergleichsspannung $\hat{\sigma}_{mod.Mises}$.

Damit ist es gelungen, die maßgebliche Fließbehinderung φ_{global} allein aus den in den Knoten der FEM-Berechnung bekannten Spannungszuständen abzuleiten. Die so berechneten Werte stimmen mit denen von *Dietmann* [7] nicht exakt überein, da die Fließbehinderung im Gegensatz zu [7] immer auf den Wert im Auswertepunkt bezogen wird. Es wird deshalb eine einfache Korrekturbeziehung zur Bestimmung der globalen Fließbehinderung aus der der FEM-Ergebnisse vorgeschlagen:

$$\varphi_{global} = 1 + \frac{\varphi_{global,FEM} - 1}{0,63787} \quad (3.82)$$

In **Abbildung 3.12** sind die mit dem vorgestellten Konzept berechneten globalen Fließbehinderungen mit und ohne Berücksichtigung von Gl.(3.82) den Ergebnissen von *Dietmann* gegenübergestellt. Für „einfache“ Belastungs-

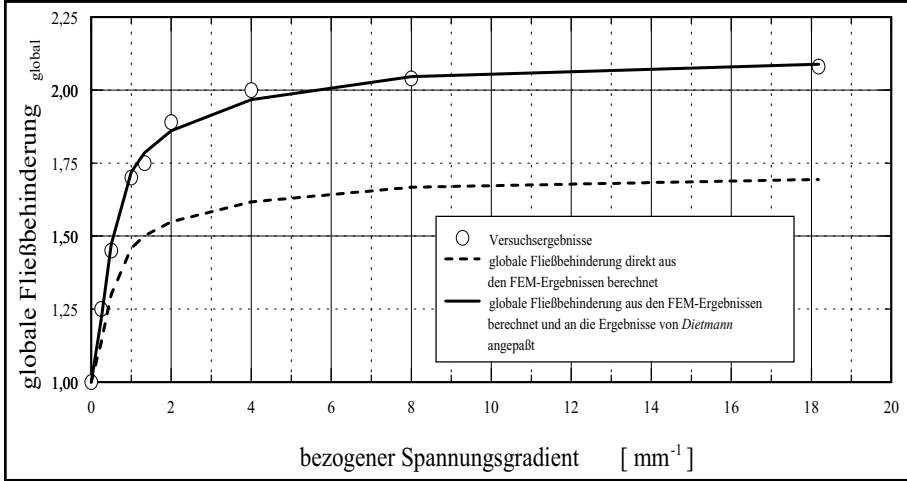


Abbildung 3.12: Berechnete globale Fließbehinderungen φ_{global} mit und ohne Berücksichtigung von Gl.(3.82) und Versuchsergebnisse von *Dietmann* [7] aufgetragen über dem bezogenen Spannungsgradienten χ

arten und Kerbgeometrien wird in **Kapitel 3.6** eine Schätzgleichung für die globale Fließbehinderung vorgestellt und im **Anhang B** werden Diagramme zu ihrer graphischen Bestimmung bereitgestellt.

Die Ergebnisse in **Abbildung 3.13** verdeutlichen beispielhaft für einen Rundstab mit tiefer Umdrehungskerbe unter Zug-Schwellbelastung die große Abhängigkeit der berechneten Lebensdauer von der globalen Fließbehinderung. Die Berücksichtigung der Fließbehinderung ergibt eine niedrigere „fiktive“ Spannung und damit eine größere Makrostützziffer m , wenn die elastisch gestützten Eingangsgrößen identisch sind. Dies hat zur Folge, daß die Steigung der berechneten Wöhlerlinie des Bauteils größer wird, was gleichbedeutend mit einem kleineren Wöhlerlinien-Exponent k ist^K. Die Versuchsergebnisse aus [34] ergeben für den WöhlerlinienExponenten des glatten Stabes $k = 16$ und für das obige Beispiel $k \approx 4,7$. Ohne Berücksichtigung der Fließbehinderung beträgt der Wöhlerlinien-Exponent nach **Abbildung 3.13** ungefähr $k \approx 6,6$, während er bei Berücksichtigung der Mehrachsigkeit etwa $k \approx 5$ beträgt.

In **Tabelle 3.5** sind für gekerbte und abgesetzte Rund- und Flachstäbe mit

^KWird im folgenden von der Steigung der Wöhlerlinie gesprochen, soll darunter der anschauliche Verlauf verstanden werden. Die Steigung entspricht dem Wert $1/k$.

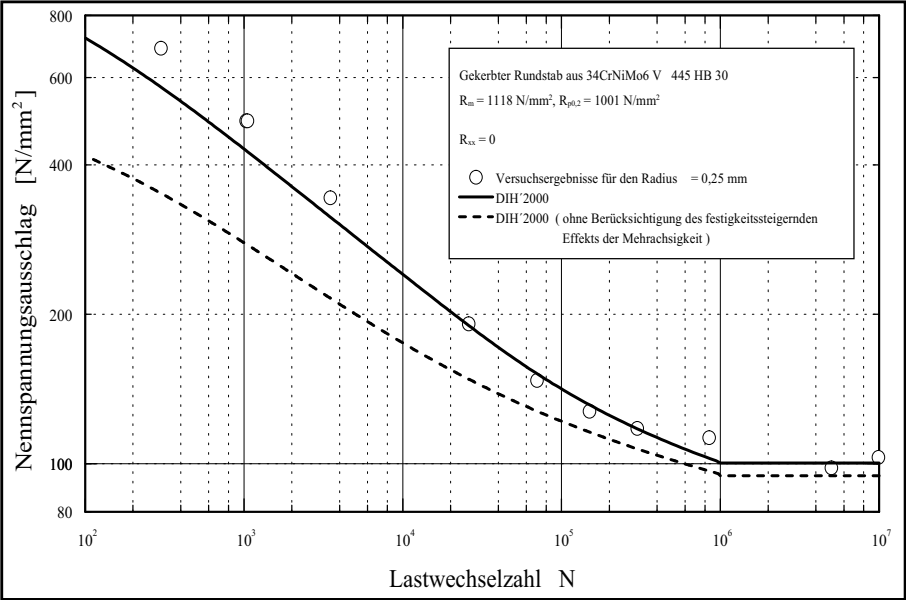


Abbildung 3.13: Einfluß des festigkeitssteigernden Effekts der Mehrachsigkeit und Versuchsergebnisse von *Liebrich* [34]

jeweils zwei unterschiedlichen Kerbradien $\rho = 2\text{mm}$ und $\rho = 0,25\text{mm}$ die globalen Fließbehinderungen für die Belastungsarten Zug-Druck und Biegung auf der Grundlage der FEM-Ergebnisse zusammengefaßt.

Tabelle 3.5: Globale Fließbehinderung φ_{global} für verschiedene Stabformen, Kerbgeometrien und Belastungsarten

| Stabform ^a | Kerbform ^b | Kerbradius | $\varphi_{global,Zug}$ | $\varphi_{global,Biegung}$ |
|-----------------------|-----------------------|------------|------------------------|----------------------------|
| R | g | 2 | 1,42 | 1,42 |
| R | g | 0,25 | 1,29 | 1,31 |
| R | a | 2 | 1,17 | 1,20 |
| R | a | 0,25 | 1,13 | 1,11 |
| F | g | 2 | 1,45 | 1,45 |
| F | g | 0,25 | 1,44 | 1,44 |
| F | a | 2 | 1,25 | - ^c |
| F | a | 0,25 | 1,24 | - |

^aR = Rundstab; F = Flachstab
^bg = Rundstab mit Umdrehungskerbe bzw. Flachstab mit Außenkerbe; a = abgesetzter Rund- bzw. Flachstab
^ckeine Berechnung erfolgt

Die Ergebnisse in der **Tabelle 3.5** zeigen, daß die globale Fließbehinderung für flache Kerben praktisch unabhängig von der Belastungsart Zug oder Biegung ist. Dies gilt sowohl für Rund- als auch für Flachstäbe unabhängig von der Kerbform. Werden die Ergebnisse für einen tief gekerbten Rundstab für die Belastungsarten Zug-Druck und Biegung miteinander verglichen, so ist eine Abhängigkeit von der Belastungsart festzustellen (vergl. **Tabelle 3.6**). Dies ist durchaus plausibel, da dem Spannungsgradienten auf Grund der Kerbgeometrie zusätzlich noch der der Belastungsart bei Biegung überlagert ist, so daß die Radialspannung unterhalb der Oberfläche bei Biegung nicht so anwächst wie bei Zug. Die Folge ist eine kleinere lokale Fließbehinderung. Der Wert von φ_{global} läßt sich für abgesetzte Stäbe näherungsweise aus dem Wert für den gekerbten Stab berechnen (s. Gl.(3.103)).

Für die FEM-Berechnung von Flachstäben mit geringer Tiefe (Dicke) wurde im Gegensatz zur allgemeinen Vorgehensweise nicht der ebene Spannungszustand, sondern der ebene Dehnungszustand angenommen. Damit lassen sich die großen Werte der Fließbehinderung erklären. Für den ebenen Spannungszustand wäre die lokale Fließbehinderung wesentlich kleiner. Dieser Vorgehensweise bei Flachstäben liegt die Annahme zu Grunde, daß bereits durch einen kleinen Anriß an der höchst beanspruchten Stelle der idealisierte ebene Spannungszustand in einen ebenen Dehnungszustand übergeht. FEM-Berechnungen auf der Basis von Volumenelementen zeigen, daß der Ort der höchsten Beanspruchung in der Mitte der Bauteildicke, also bei der halben Breite, liegt. Die Nachrechnung der Versuchsergebnisse von *Haibach* und *Matschke* [24] bestätigt diese Vorgehensweise (vergl. **Abbildung 4.10**).

Für eine aus einer Normal- und einer Schubspannung zusammengesetzten Beanspruchung schlägt *Hahn* [21] vor, die resultierende Fließbehinderung mit

$$\varphi = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_{xx}^2 \cdot \varphi_{Zug,Biegung}^2 + 3 \cdot \hat{\sigma}_{xy}^2}{\hat{\sigma}_{xx}^2 + 3 \cdot \hat{\sigma}_{xy}^2}} \quad (3.83)$$

abzuschätzen. Da der bezogene Spannungsgradient der Kerbe für die Belastungsarten Zug-Druck und Biegung gleich ist, wird nach [21] keine Näherungsbeziehung bei der Überlagerung dieser Belastungsarten benötigt. In **Tabelle 3.6** sind die mit den Gleichungen Gl.(2.65) und Gl.(3.83) berechneten Werte von φ_{global} denen der FEM-Berechnungen gegenübergestellt. Die für die Belastungsart Zug-Druck und Torsion berechneten Werte liegen teilweise erheblich über denen der FEM-Berechnung. Aus diesem Grund wird vorgeschlagen, in der Vergleichsspannung die Schubspannung nicht mit dem Faktor drei, sondern mit vier zu gewichten (s. Gl.(3.106)). Da die Fließbehinderungen für Zug-Druck und Biegung nicht identisch sind, wird mit Gl.(3.105) eine weitere Näherungsbeziehung zur Abschätzung von $\varphi_{Biegung}$ aus φ_{Zug} bereitgestellt.

Tabelle 3.6: Globale Fließbehinderung φ_{global} für zusammengesetzte Belastungen an unterschiedlich gekerbten Rundstäben^a

| Belastung: Zug-Druck und Torsion | | | | |
|----------------------------------|-----------------------|-----------------|-------------------------|----------------------------|
| f_{Zug}^b | $f_{Tor.bzw.Bieg.}^c$ | φ_{FEM} | $\varphi_{geschätzt}^d$ | $\varphi_{geschätzt} [21]$ |
| 1 | 0 | 1,78 | 1,79 | 1,86 |
| 1 | 1 | 1,13 | 1,38 | 1,48 |
| 1 | 5 | 1 | 1,03 | 1,04 |
| 1 | 10 | 1 | 1,01 | 1,01 |
| 2 | 1 | 1,39 | 1,62 | 1,72 |
| 5 | 1 | 1,68 | 1,76 | 1,83 |
| 10 | 1 | 1,75 | 1,78 | 1,85 |

| Belastung: Zug-Druck und Biegung | | | | |
|----------------------------------|----|------|------|------|
| 1 | 0 | 1,77 | 1,77 | 1,68 |
| 0 | 1 | 1,64 | 1,64 | 1,68 |
| 1 | 1 | 1,68 | 1,71 | 1,68 |
| 1 | 10 | 1,64 | 1,65 | 1,68 |
| 2 | 1 | 1,72 | 1,73 | 1,68 |
| 10 | 1 | 1,75 | 1,76 | 1,68 |

| Belastung: Zug-Druck und Torsion | | | | |
|----------------------------------|----|------|------|-------|
| 1 | 0 | 1,77 | 1,77 | 1,68 |
| 1 | 1 | 1,34 | 1,32 | 1,32 |
| 1 | 5 | 1,13 | 1,02 | 1,02 |
| 1 | 10 | 1,07 | 1,01 | 1,006 |
| 2 | 1 | 1,46 | 1,56 | 1,53 |
| 5 | 1 | 1,69 | 1,73 | 1,65 |
| 10 | 1 | 1,75 | 1,76 | 1,67 |

^aDie Kerbspannungen sind jeweils für eine Randnennspannung $S_{Zug} = 100 \text{ N/mm}^2$, $S_{Biegung} = 100 \text{ N/mm}^2$ und $T = 100 \text{ N/mm}^2$ berechnet.

^bFaktor, mit dem die Zug-Drucknennspannung S_{Zug} bei der Überlagerung der zusammengesetzten Belastung multipliziert wird

^cFaktor, mit dem die Torsions- bzw. die Biegenennspannung T bzw. $S_{Biegung}$ bei der Überlagerung der zusammengesetzten Belastung multipliziert wird

^dMit den Näherungsbeziehungen Gl.(3.103) und Gl.(3.106) abgeschätzter Wert

Die mit den neuen Schätzformeln berechneten Werte der Fließbehinderung stimmen für die einachsigen Belastungen mit den FEM-Ergebnissen überein. Für eine zusammengesetzte Belastung aus Zug und Biegung liegen sie geringfügig oberhalb der „wahren“ Werte. Dagegen wird der Einfluß einer überlagerten Torsionsbelastung weiterhin unterschätzt, liegt aber dichter an den Ergebnissen der FEM-Berechnungen als mit den Schätzformeln aus [21].

3.4 Vergleichsmittelspannung

Wird das Bauteil nicht durch rein wechselnde Belastungen ($R \neq -1$) beansprucht, muß für die Bewertung des Spannungszustandes neben der Vergleichsspannungs-Amplitude auch eine Vergleichsmittelspannung definiert werden. Auf Grund der guten Übereinstimmung von Rechnung und Versuch in [21] wird die effektiv wirksame Vergleichsmittelspannung

$$\begin{aligned}\sigma_{vm} &= \max [\sigma_{o,NSH}(t)] - \max [\sigma_{a,NSH}(t)] \\ &= \tilde{\sigma}_{o,NSH} - \tilde{\sigma}_{a,NSH}\end{aligned}\quad (3.84)$$

als Differenz der zeitlich größten elastisch und plastisch gestützten Hauptspannungen $\tilde{\sigma}_{o,NSH}$ und $\tilde{\sigma}_{a,NSH}$ definiert. Die Vergleichsoberspannungs-Zeitfunktion $\sigma_{o,NSH}(t)$ wird mit den Invarianten Gl.(3.47), den Mikrostützziffern $n_{V,1o}$ Gl.(3.61), $n_{V,2o}$ Gl.(3.62) und $n_{V,3o}$ Gl.(3.64) sowie der Makrostützziffer m_o Gl.(3.78) gebildet:

$$\sigma_{o,NSH}(t) = \sigma_{1,o}(t) \quad \text{mit} \quad (3.85)$$

$$\sigma_{1,o}^3(t) - \frac{\hat{I}_{1o}(t)}{\sqrt{n_{V,1o}} \cdot m_o} \cdot \sigma_{1,o}^2(t) + \frac{\hat{I}_{2o}(t)}{n_{V,2o} \cdot m_o^2} \cdot \sigma_{1,o}(t) - \frac{\hat{I}_{3o}(t)}{n_{V,3o} \cdot m_o^3} = 0 \quad (3.86)$$

Die Vergleichsausschlagsspannungs-Zeitfunktion $\sigma_{a,NSH}$ wird dagegen mit den Invarianten Gl.(3.46), den Mikrostützziffern $n_{V,1a}$, $n_{V,2a}$ und $n_{V,3a}$ sowie der Makrostützziffer m_a Gl.(3.77) bestimmt:

$$\sigma_{a,NSH}(t) = \sigma_{1,a}(t) \quad \text{mit} \quad (3.87)$$

$$\sigma_{1,a}^3(t) - \frac{\hat{I}_{1a}(t)}{\sqrt{n_{V,1a}} \cdot m_a} \cdot \sigma_{1,a}^2(t) + \frac{\hat{I}_{2a}(t)}{n_{V,2a} \cdot m_a^2} \cdot \sigma_{1,a}(t) - \frac{\hat{I}_{3a}(t)}{n_{V,3a} \cdot m_a^3} = 0 \quad (3.88)$$

Für den zweiachsigen Beanspruchungszustand müssen die beiden Vergleichsspannungen $\sigma_{o,NSH}(t)$ und $\sigma_{a,NSH}(t)$ nicht aus den Polynomen dritten Grades Gl.(3.86) und Gl.(3.87) bestimmt werden, sondern können direkt angegeben werden:

$$\sigma_{o,NSH}(t) = \frac{1}{2 \cdot m_o} \cdot \left[\frac{\hat{I}_{1o}(t)}{\sqrt{n_{V,1o}}} + \sqrt{\frac{\hat{I}_{1o}^2(t)}{n_{V,1o}} - 4 \cdot \frac{\hat{I}_{2o}(t)}{n_{V,2o}}} \right] \quad (3.89)$$

$$\sigma_{a,NSH}(t) = \frac{1}{2 \cdot m_a} \cdot \left[\frac{\hat{I}_{1a}(t)}{\sqrt{n_{V,1a}}} + \sqrt{\frac{\hat{I}_{1a}^2(t)}{n_{V,1a}} - 4 \cdot \frac{\hat{I}_{2a}(t)}{n_{V,2a}}} \right] \quad (3.90)$$

3.5 Vorstellung des Lebensdauer-Bewertungskonzeptes

In den vorangegangenen Kapiteln wurden einzelne Konzepte zur rechnerischen Erfassung der die Lebensdauer bestimmenden Effekte vorgestellt und diskutiert. In den beiden **Abbildungen 3.14** und **3.15** ist darauf aufbauend schematisch die Vorgehensweise zur Lebensdauerabschätzung für periodisch schwingende Beanspruchungen dargestellt. Für nichtperiodische Frequenzgemische kann nur ein Dauerfestigkeitsnachweis geführt werden, da bei Beanspruchungen oberhalb dieses Niveaus eine Betriebsfestigkeitsbewertung erfolgen muß. In der ersten Abbildung sind die Schritte zur Berechnung der von der Lastwechselzahl unabhängigen Größen zusammengefaßt, während in der zweiten Abbildung ein iterativer Prozeß zur Berechnung der ertragbaren Lastwechselzahl dargestellt ist.

Die Eingangsgrößen der Berechnung bilden der Werkstoff, die Bauteilgeometrie und die äußeren Lasten mit ihren jeweiligen Last-Zeit-Funktionen sowie der Eigenspannungszustand. Aus den Bauteil- und den Belastungsinformationen wird der allgemeine Spannungszustand mit einer FEM-Berechnung ermittelt. Es folgt die Berechnung der Mikrostützziffern der Ober- und Ausschlagspannung für die einzelnen Invarianten mit den Gleichungen (3.61)-(3.64). Neben den Kerbgrundspannungen fließen dabei für die Bestimmung des Ortes und des Zeitpunktes der Berechnung die Last-Zeit-Verläufe der äußeren Lasten und einzelne Werkstoffkennwerte ein Gl.(3.48) und Gl.(3.49). Anschließend können die Werte der Makrostützwirkung m_a und m_o mit der modifizierten *Neuber*-Hyperbel ermittelt werden. Als Eingangsgröße für mehrachsige Beanspruchungen dient die elastisch gestützte modifizierte *von Mises*-Vergleichsspannung

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{a,mod.Mises}(t_0) &= \left[\sqrt{\frac{\hat{I}_{1a}^2(t_0)}{n_{V,1a}} - k_a^2 \cdot \frac{\hat{I}_{2a}(t_0)}{n_{V,2a}}} \right] \quad \text{und} \\ \bar{\sigma}_{o,mod.Mises}(t_0) &= \left[\sqrt{\frac{\hat{I}_{1o}^2(t_0)}{n_{V,1o}} - k_a^2 \cdot \frac{\hat{I}_{2o}(t_0)}{n_{V,2o}}} \right] \quad , \end{aligned}$$

wobei der Zeitpunkt t_0 mit Gl.(3.76) ermittelt wird. Daneben werden die allein aus dem allgemeinen Spannungszustand bestimmten Größen des unteren Niveaus der modifizierten *Neuber*-Hyperbel Gl.(3.79) und der globalen Fließbehinderung Gl.(3.82) benötigt. Der Werkstoff fließt über die zyklische

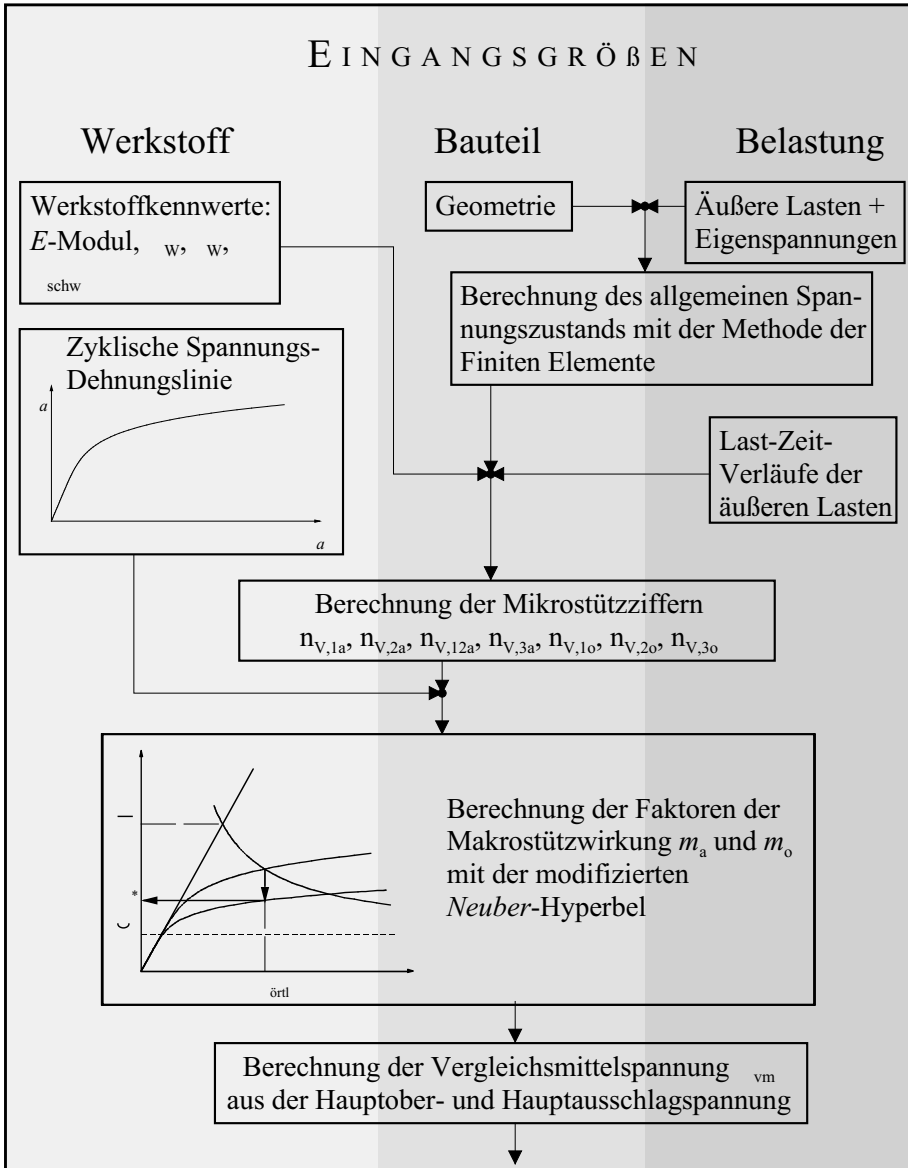


Abbildung 3.14: Schematische Vorgehensweise zur Lebensdauerbewertung beginnend bei den Eingangsgrößen bis zu den von der Lastwechselzahl abhängigen Größen

Spannungs-Dehnungslinie des ungekerbten einachsigt zugbelasteten Stabes in die Berechnung ein. Schließlich kann als letzte von der Lastwechselzahl un-

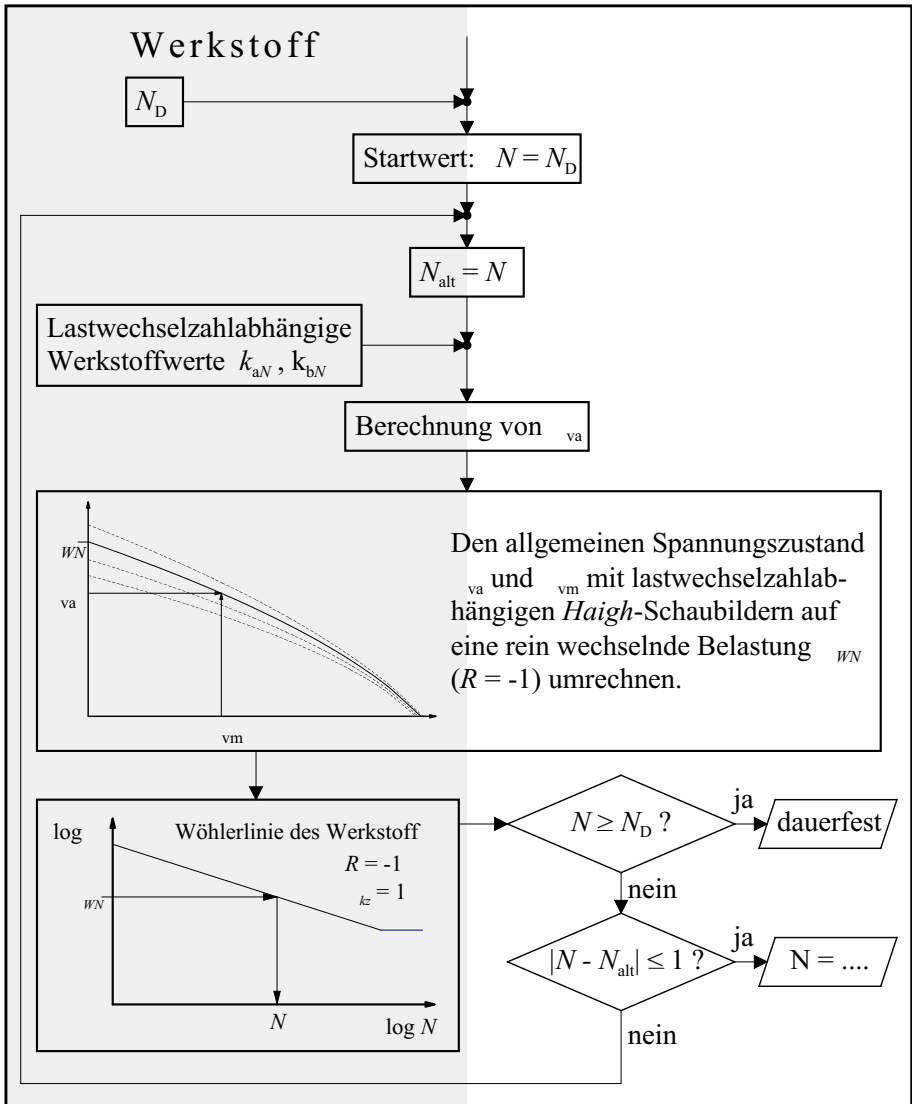


Abbildung 3.15: Schematische Vorgehensweise zur Lebensdauerbewertung für die von der Lastwechselzahl abhängigen Größen

abhängige Größe die Vergleichsmittelspannung aus der elastisch und plastisch gestützten Hauptober- und Hauptausschlagsspannung mit Gl.(3.84) bestimmt werden.

Die Berechnung der ertragbaren Lastwechselzahl N erfolgt durch einen iterati-

ven Prozeß, da einzelne Werkstoffkennwerte von der Lastwechselzahl abhängig sind. Der Startwert für N ist die Ecklastwechselzahl N_D des glatten Stabes. In dem folgenden iterativen Prozeß wird zunächst der Hilfsgröße N_{alt} der aktuelle Wert der Lastwechselzahl zugeordnet: $N_{alt} = N$. Es folgt die Berechnung der Vergleichsspannungs-Amplitude

$$\sigma_{va} = \frac{1}{m_a} \sqrt{\frac{\hat{J}_{1a}}{n_{V,1a}} - k_{aN}^2 \cdot \frac{\hat{J}_{2a}}{n_{V,2a}} - k_{bN} \cdot \frac{\hat{J}_{12a}}{n_{V,12a}}} \quad (3.91)$$

Die Invarianten \hat{J}_{1a} , \hat{J}_{2a} und \hat{J}_{12a} werden mit den elastisch berechneten Kerbgrundspannungen bestimmt. Der lastwechselzahlabhängige Werkstoffkennwert k_{aN} läßt sich mit den Gleichungen Gl.(3.20) und Gl.(3.22) ermitteln, während k_{bN} aus den Gleichungen Gl.(3.24), Gl.(2.22), Gl.(3.25) und Gl.(3.28) folgt. Dabei entspricht die in den Gleichungen eingesetzte Lastwechselzahl N der Hilfsgröße N_{alt} . Der auf einachsige Vergleichsspannungen σ_{va} und σ_{vm} reduzierte mehrachsige Beanspruchungszustand wird dann mit einem lastwechselzahlabhängigen *Haigh*-Schaubild in eine rein wechselnde Beanspruchung σ_{WN} ($R = -1$) umgerechnet. Dazu kann zweckmäßigerweise Gl.(2.27) nach σ_{WN} umgestellt werden

$$\sigma_{WN} = \frac{\sigma_{va} \cdot (1 - Q_N) \cdot (1 - R)}{-Q_N + \sqrt{Q_N^2 + (1 - Q_N) \cdot (1 - R)^2}} \quad , \quad (3.92)$$

wobei σ_A durch σ_{va} ersetzt wird und das Spannungsverhältnis R mit den Vergleichsspannungen σ_{va} und σ_{vm} entsprechend Gl.(2.1) gebildet wird. Der von der Mittelspannungsempfindlichkeit abhängige Parameter Q_N wird mit den Gleichungen Gl.(2.24) und Gl.(2.26) bestimmt. An Hand der Spannungswöhlerlinie des glatten Stabes Gl.(2.22) kann σ_{WN} eine Lastwechselzahl

$$N = N_D \cdot \left(\frac{\sigma_W}{\sigma_{WN}} \right)^k \quad (3.93)$$

zugeordnet werden. Schließlich werden die beiden Abbruchkriterien überprüft. Ist $N \geq N_D$, kann die Beanspruchung dauerhaft ertragen werden und die Berechnungsschleife wird verlassen. Anderenfalls wird überprüft, ob der Betrag der Differenz der Lastwechselzahlen N und N_{alt} kleiner einer vorgegebenen Schranke ist, die im Rahmen dieser Arbeit zu eins gewählt wird. Ist die Bedingung erfüllt, entspricht die ertragbare Lastwechselzahl dem aktuellen Wert N . Anderenfalls wird die Schleife erneut durchlaufen.

3.6 Abschätzformeln benötigter Kennwerte

Die vorangegangene Beschreibung des Lebensdauer-Bewertungskonzeptes verdeutlicht, daß für die Berechnung der Zeit- und Dauerfestigkeit glatter wie

gekerbter Bauteile zahlreiche Werkstoffkennwerte benötigt werden. In der Praxis stehen aber häufig nicht alle Werte zur Verfügung, sei es, weil sie speziell in der frühen Entwicklungsphase eines Produktes noch nicht ermittelt wurden, oder weil der experimentelle Aufwand und die damit verbundenen Kosten zu hoch sind. Für diese Fälle sollten Schätzformeln bereitgestellt werden, die auf einer abgesicherten Versuchsdatenmenge basieren. Auch bei der Nachrechnung der Versuchsergebnisse im folgenden **Kapitel 4** werden die unten aufgeführten Näherungsbeziehungen verwendet, soweit die Werte in der Literatur nicht angegeben sind. Unabhängig von diesen Schätzformeln kann die Bewertung selbstverständlich auf der Basis der Versuchsergebnisse der einzelnen Werkstoffkennwerte erfolgen.

In [21] werden für die verschiedenen Werkstoffkennwerte Näherungsbeziehungen vorgeschlagen, die auch in dieser Arbeit eingesetzt werden. Der Autor entwickelte zum Teil neue Formeln für zuverlässigere Schätzungen benötigter Werkstoffkennwerte. Für die Zug-Druck-Wechselselfestigkeit schlägt er basierend auf der Datenmenge des VDEh-Berichts ABF 11 [65]

$$\sigma_W = \begin{cases} 56 \text{ N/mm}^2 + 0,144 \cdot R_m + 0,309 \cdot R_{p0,2} & \text{für } \alpha_k = 1 \\ 56 \text{ N/mm}^2 + \\ (0,144 \cdot R_m + 0,309 \cdot R_{p0,2}) \cdot 1,04 & \text{für } \alpha_k > 1 \end{cases} \quad (3.94)$$

vor. Anzumerken ist, daß die Schätzung von dem dort vorgestellten Konzept der Lebensdauerberechnung abhängig ist, da neben den reinen Zug-Druck-Wechselversuchen auch die Ergebnisse inhomogener Beanspruchungen in die Auswertung aufgenommen wurden. Diese Versuche wurden mit den Stützwirkungskonzepten jeweils zurückgerechnet.

Zur Abschätzung der Torsions-Wechselselfestigkeit τ_W wird die in [65] aufgestellte Umrechnungsformel

$$\tau_W = \left[\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \cdot \left(\frac{R_{p0,2}}{R_m} \right)^5 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right] \cdot \sigma_W \quad (3.95)$$

verwendet. Sie hat auf Grund der guten Näherung weite Verbreitung gefunden. Vielfach wird die Torsions-Wechselselfestigkeit an Vollproben ermittelt. Damit beinhaltet dieser Wert bereits die Mikro- und Makrostützwirkung. Diese beiden Effekte müssen herausgerechnet werden, um die eigentliche Größe des Werkstoffkennwertes zu erhalten. In der vorliegenden Arbeit werden deshalb die Werte von τ_W mit den vorgestellten Konzepten der Mikro- und Makrostützwirkung reduziert.

Der Werkstoffkennwert k_b , mit dem die dritte Invariante der Vergleichsspannungs-Amplitude σ_{va} gewichtet wird, wurde erstmals von *Hahn* eingeführt. Zur

Abschätzung von k_b schlägt er auf Grund der kleinen Datenmenge einen bilinearen Ansatz in Abhängigkeit von dem Wechselfestigkeitsverhältnis $k_a = \sigma_W / \tau_W$ vor:

$$k_b = \begin{cases} 0 & \text{für } k_a \leq 1,563 \\ 4,675 \cdot (k_a - 1,563) & \text{für } k_a > 1,563 \end{cases} \quad (3.96)$$

Neben der Zug-Druck-Wechselfestigkeit ist für die Bewertung mittelspannungsbehafteter Beanspruchungen die Schwellfestigkeit σ_{schw} eine wichtige Größe. Sie wurde in der Vergangenheit vielfach über die Mittelspannungsempfindlichkeit M berechnet. Für die Mittelspannungsempfindlichkeit selbst wird beispielsweise in [65] eine Näherungsbeziehung in Abhängigkeit von der Zugfestigkeit angegeben:

$$M = 0,00035 \cdot R_m - 0,1 \quad (3.97)$$

Diese Abhängigkeit von einem statischen Kennwert bedingt aber einen Bruch der Lebensdauerberechnung im Zeitfestigkeitsbereich. Außerdem sollten Schätzformeln zyklischer Werkstoffkennwerte möglichst von ebenfalls zyklischen Größen abhängig sein. Ein Vorschlag einer Näherungsbeziehung kommt von *Troost* und Mitarbeitern [64], die die Schwellfestigkeit mit der Zug-Druck-Wechselfestigkeit abschätzt:

$$\sigma_{schw} = 1,55 \cdot \sigma_W + \sigma_0 \quad (3.98)$$

Die Größe σ_0 geben sie für Stahl und Leichtmetall-Legierungen mit $\sigma_0 = 15 \text{ N/mm}^2$ und für Gußwerkstoffe mit $\sigma_0 = -10 \text{ N/mm}^2$ an. Eine ähnliche Beziehung wird auch in [21] vorgeschlagen:

$$\sigma_{schw} = 1,52 \cdot \sigma_W + 33 \text{ N/mm}^2 \quad (3.99)$$

Die Schwellfestigkeitswerte werden in dieser Arbeit, soweit sie für die ausgewählten Versuche nicht angegeben sind, mit Gl.(3.99) abgeschätzt.

Für die Werkstoffkennwerte der zyklischen Spannungs-Dehnungslinie $R'_{p0,2}$ und n' Gl.(2.13) werden von *Hahn* zwei Beziehungen vorgeschlagen, die beide eine Abhängigkeit von σ_W beinhalten:

$$R'_{p0,2} = 1,16 \cdot \sigma_W + 57 \text{ N/mm}^2 \quad (3.100)$$

$$\frac{1}{n'} = \frac{\log 0,13}{\log \frac{\sigma_W}{R'_{p0,2}}} \quad (3.101)$$

Für die Spannungs-Wöhlerlinie des glatten Stabes Gl.(2.9) werden neben der Dauerschwingfestigkeit, die der Zug-Druck-Wechselfestigkeit entspricht, die

Werte der zugehörigen Ecklastwechselzahl N_D und des Exponenten k benötigt. In [21] werden die Versuchsergebnisse aus [65] statistisch ausgewertet. Für eine Überlebenswahrscheinlichkeit der Prüfkörper $P_{\bar{u}} = 50\%$ ergeben sich Werte von $N_D = 10^6$ Lastwechsel und $k = 15$.

Für die Bestimmung der charakteristischen Werkstoffstrukturlänge ρ^* nach Gl.(2.54) wird neben der Schwellfestigkeit die dauerfest ertragbare Spannungsintensität ΔK_{th0} benötigt. Für diese Größe gilt nach *Schwalbe* [54] im Mittel:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta K_{th0}}{E} &= 2,75 \cdot 10^{-5} \sqrt{m} \\ \Leftrightarrow \Delta K_{th0} &= \frac{E}{1150 \cdot \sqrt{mm}} \quad . \end{aligned} \quad (3.102)$$

In **Kapitel 3.3.2** wurde gezeigt, wie die Größe der Fließbehinderung φ aus einer FEM-Berechnung ermittelt wird. Für einfache Belastungsfälle (Zug- Druck- bzw. Biegebelastung) und einfache Kerbgeometrien (stabförmige Bauteile), für die im allgemeinen keine FEM-Berechnungen durchgeführt werden, werden zwei Schätzformeln - eine für Bauteile mit umlaufender Kerbe $\varphi_{gek,Zug}$ und eine für abgesetzte Bauteile $\varphi_{abg,Zug}$ -

$$\begin{aligned} \varphi_{gek,Zug} &\approx \frac{1 + 8,19 \cdot (a - 0,438) + 4,726 \cdot b \cdot \chi \cdot (a - 0,343)^2}{1 + 8,19 \cdot (a - 0,438) + 2,037 \cdot b \cdot \chi \cdot (a - 0,262)^2} \\ \varphi_{abg,Zug} &= \frac{\varphi_{gek,Zug} + 1}{2} \end{aligned} \quad (3.103)$$

vorgeschlagen. Die Parameter a und b werden entsprechend **Abbildung 3.16** bestimmt, während für χ der Anteil des bezogenen Beanspruchungsgefälles eingesetzt wird, der auf die Kerbgeometrie zurückzuführen ist. Im **Anhang B** werden Diagramme zur graphischen Bestimmung von $\varphi_{gek,Zug}$ bereitgestellt.

Die Fließbehinderung einer Biegebelastung ist etwas kleiner als die der Zug-Druckbelastung. Der Unterschied ist abhängig von der Tiefe der Kerbe. Mit Gl.(3.104) kann die Fließbehinderung für eine Biegebelastung abgeschätzt werden:

$$\varphi_{Biegung} = \varphi_{Zug} \cdot (1 - b \cdot 0,0146) \quad (3.104)$$

Für zusammengesetzte Belastungen aus Zug-Druck und Biegung wird vorgeschlagen, die beiden einzelnen Fließbehinderungen gewichtet mit den jeweiligen Kerbgrundspannungen zu mitteln:

$$\varphi = \frac{\hat{\sigma}_{xx,Zug} \cdot \varphi_{Zug} + \hat{\sigma}_{xx,Biegung} \cdot \varphi_{Biegung}}{\hat{\sigma}_{xx,Zug} + \hat{\sigma}_{xx,Biegung}} \quad (3.105)$$

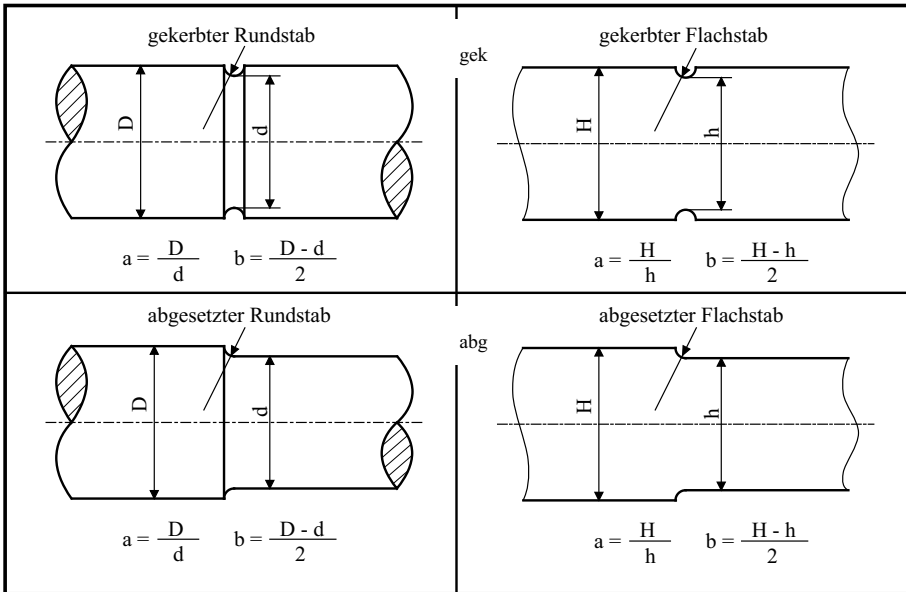


Abbildung 3.16: Bestimmung der Geometrieparameter a und b für gekerbte bzw. abgesetzte Rund- und Flachstäbe

Werden hingegen Normal- und Schubspannungen überlagert, kann die resultierende Fließbehinderung mit

$$\varphi = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_{xx}^2 \cdot \varphi^2 + 4 \cdot \hat{\sigma}_{xy}^2}{\hat{\sigma}_{xx}^2 + 4 \cdot \hat{\sigma}_{xy}^2}} \quad (3.106)$$

abgeschätzt werden.

4 Validierung der Hypothese

In diesem Kapitel werden die mit dem vorgestellten Konzept berechneten Lebensdauern den Versuchsergebnissen gegenübergestellt. Darüber hinaus werden die Berechnungsergebnisse anderer, zur Zeit gebräuchlicher Bewertungskonzepte in den Abbildungen dargestellt. Durch Vergleich mit den Versuchsergebnissen kann die Vorhersagegenauigkeit der einzelnen Konzepte auch untereinander beurteilt werden.

4.1 Ungekerbte Bauteile

4.1.1 Dauerfestigkeit ungekerbter Bauteile

Im Rahmen dieser Arbeit werden die Ergebnisse der DIH^A für Festigkeitsnachweise ungekerbter Bauteile im Dauerfestigkeitsbereich mit denen der DIH nach *Hahn*^B [21], der Schubspannungs-Intensitäts-Hypothese (SIH) nach *Liu* [35] und der Quadratischen Versagens-Hypothese (QVH) nach *Kaniut* [29] verglichen. Die grundlegenden Berechnungsgleichungen der SIH sind im **Anhang E.1** und die der QVH im **Anhang E.2** zusammengestellt.

Eine statistische Auswertung der Treffsicherheit der DIH '95, der SIH und der QVH ist in [21] zu finden. Sie basiert auf einer umfangreichen Versuchsdatensmenge.

Der Dauerfestigkeitsnachweis der DIH '2000 für ungekerbte Bauteile unterscheidet sich von dem der DIH '95 nur für mehrfrequente Beanspruchungen. Die Darstellung der Ergebnisse ist deshalb im folgenden auf diese Beanspruchungsart beschränkt.

In **Abbildung 4.1** ist der Einfluß der Frequenz auf die ertragbare Spannung für eine überlagerte Beanspruchung aus einer wechselnden Normal- und einer wechselnden Schubspannung dargestellt. Der ertragbare Spannungsausschlag σ_{xxa} ist für ganzzahlige Frequenzverhältnisse λ_{xy} bzw. $1/\lambda_{xy}$ berechnet und in der Abbildung durch Geraden verbunden. Das Frequenzverhältnis der Normalspannung λ_{xx} ist konstant und beträgt $\lambda_{xx} = 1$.

Die beste Übereinstimmung mit den Versuchsergebnissen von *Mielke* [44] und *Kaniut* [29] liefern die DIH '2000 und die DIH '95. Auffällig ist, daß die Ergebnisse für „gerade“ Frequenzverhältnisse übereinstimmen, während der ertragbare Spannungsausschlag für „ungerade“ Verhältnisse eine entgegengesetzte Tendenz aufweist. Dies bedeutet beispielsweise für $\lambda_{xy} = 3$, daß die DIH '2000

^AIn den Bildern DIH '2000 genannt.

^BIn den Bildern DIH '95 genannt.

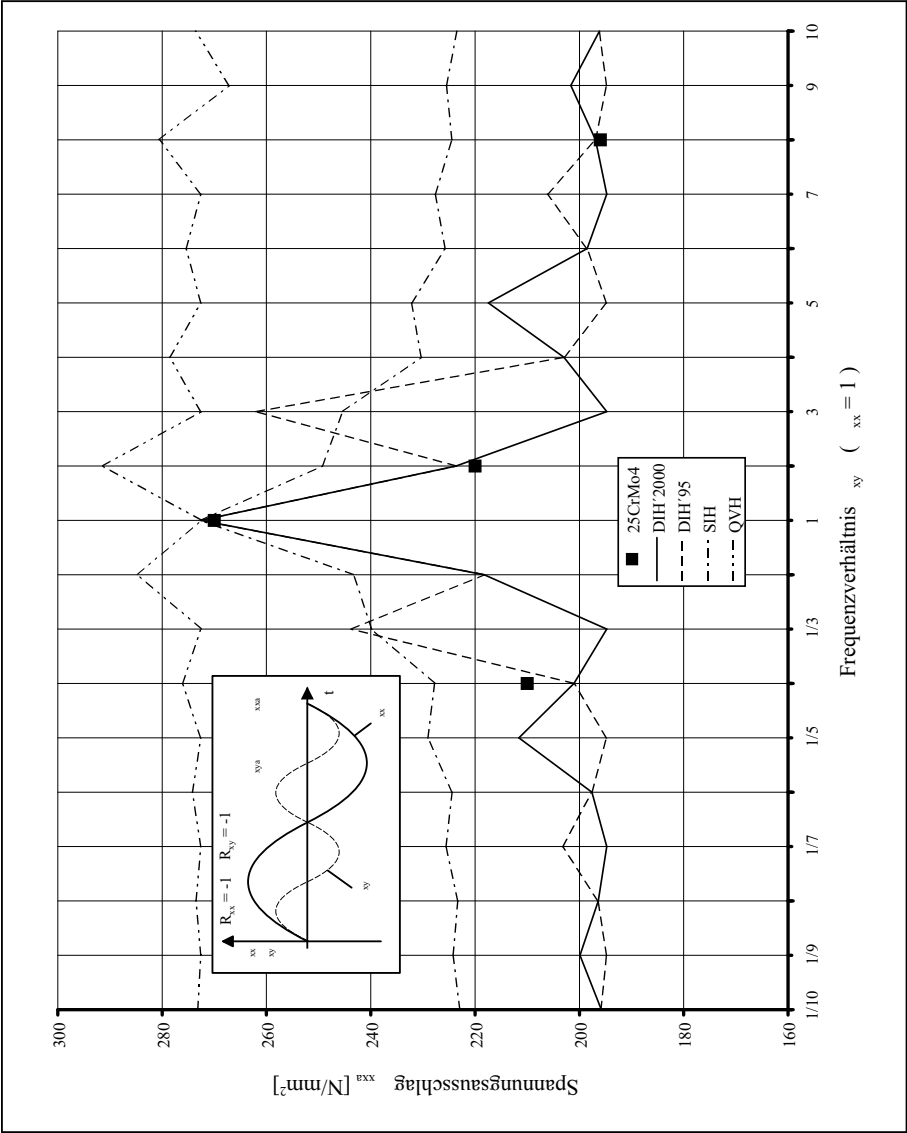


Abbildung 4.1: Einfluß des Frequenzverhältnisses bei einer wechselnden Normal- und einer wechselnden Schubspannung mit $\delta_{xy} = 0^\circ$ und Versuchsergebnissen von *Mielke* [44] und *Kaniut* [29]

entgegen der DIH '95 von einer weiteren Minderung der ertragbaren Spannung gegenüber dem Verhältnis $\lambda_{xy} = 2$ ausgeht.

Für große Frequenzverhältnisse strebt der ertragbare Spannungsausschlag σ_{xxa} einem konstanten Wert zu, so daß für die Vergleichsspannungs-Amplitude

$$(\sigma_{va})_{\lambda_{xx} \gg \lambda_{xy}} = (\sigma_{va})_{\lambda_{xy} \gg \lambda_{xx}} = |\sigma_{xxa}| + k_a \cdot |\sigma_{xya}| \quad (4.1)$$

gilt. Auch die Ergebnisse der SIH streben einem konstanten Wert zu. Die Ergebnisse liegen für unterschiedliche Frequenzen aber deutlich über den Werten der Versuchsergebnisse, was gleichbedeutend mit einer Aussage zur unsicheren Seite ist.

Der Einfluß unterschiedlicher Frequenzen wird durch die QVH sehr gering bewertet, was im Widerspruch zu den Versuchsergebnissen steht. Für $\lambda_{xy} = 1/2$ bzw. $\lambda_{xy} = 2$ wird sogar gegenüber $\lambda_{xy} = 1$ ein höherer ertragbarer Spannungsausschlag vorhergesagt, während das Versuchsergebnis für $\lambda_{xy} = 2$ ungefähr 18% kleiner als das für $\lambda_{xy} = 1$ ist.

Bhongbhithat [3] und *Heidenreich* [27] untersuchten den Einfluß einer Last-Zeit-Funktion, deren Verlauf periodisch, aber nicht sinusförmig ist. Jede periodische Funktion kann durch eine harmonische Analyse in eine unendliche Fourierreihe entwickelt werden. Im Rahmen dieser Arbeit werden für die Nachrechnung der Versuchsergebnisse die ersten 39 Frequenzen dieser Reihe berücksichtigt.

Die Hohlzylinder von *Bhongbhithat* wurden mit Zug-Druck und Innendruck belastet, wobei das Spannungsverhältnis jeweils $R = 0,05$ beträgt. Als Last-Zeit-Funktion wählte er neben der sinusförmigen auch trapezförmige Verläufe. Der Flankenanstiegswinkel beträgt $\alpha = 36^\circ$ und $\alpha = 90^\circ$. Letzterer ist der Grenzfall einer trapezförmigen Belastung, der entsprechend seiner Form als dreieckförmige Belastung bezeichnet wird.

Die Versuchsergebnisse zeigen, daß die Schwingungsform für synchrone ($\delta_{yy} = 0^\circ$) und für eine um $\delta_{yy} = 180^\circ$ phasenverschobene Belastung keinen Einfluß auf die ertragbare Spannungsamplitude hat (s. **Abbildung 4.2, 4.3 und 4.4**). Diese Grundvoraussetzung wird von allen vier Festigkeitshypothesen erfüllt. Kleine rechnerische Abweichungen sind auf die zum Teil numerisch sehr aufwendigen Operationen zurückzuführen.

Für eine dreieckförmige Belastung sind die Ergebnisse in **Abbildung 4.2** dargestellt. Die von den Hypothesen vorhergesagten ertragbaren Spannungsausschläge unterscheiden sich erheblich für Phasenverschiebungen zwischen $\delta_{yy} = 0^\circ$ und $\delta_{yy} = 90^\circ$. Die QVH und die SIH gehen von einem Festigkeitsanstieg aus, der durch die Versuchsergebnisse aber nicht bestätigt wird. Demgegenüber wird von den beiden Varianten der DIH auch für diesen Bereich eine Festigkeitsminderung vorhergesagt. Für den Bereich von $\delta_{yy} = 90^\circ$ bis $\delta_{yy} = 180^\circ$ stimmen die Aussagen der Hypothesen zum festigkeitsmindernden Einfluß der Phasenverschiebung überein, wobei die SIH den Versuchsergebnissen am nächsten liegt.

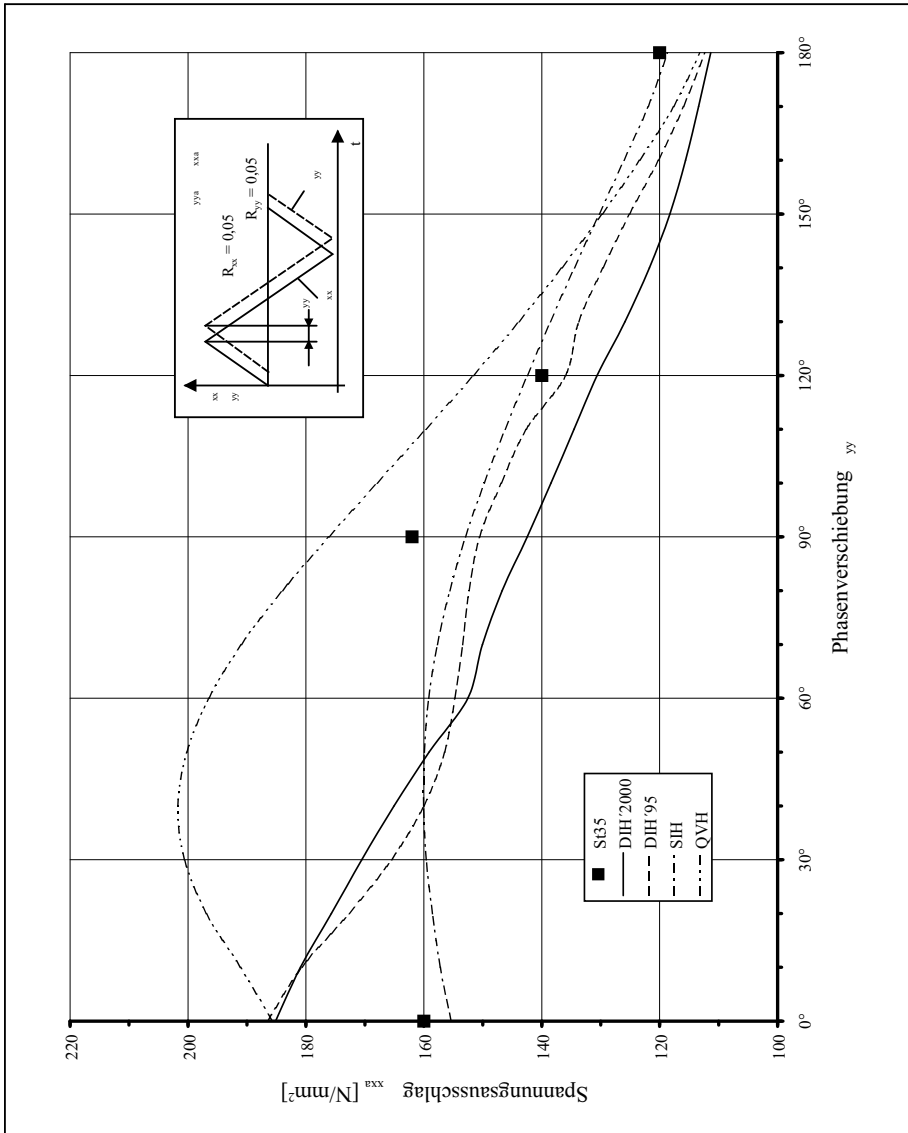


Abbildung 4.2: Einfluß der Phasenverschiebung δ_{yy} bei zwei schwelenden Normalspannungen mit dreieckiger Schwingungsform und Versuchsergebnissen von *Bhonghibhat* [3]

Für synchrone Belastung liegen die Ergebnisse der beiden Varianten der DIH und der QVH deutlich über dem experimentellen Wert. In **Abbildung 4.3** sind die Vorhersagen der DIH '2000 für unterschiedliche Torsions-Wechselstetigkeit-

ten dargestellt. Von *Bhongbhibhat* wird $\tau_W = 130 \text{ N/mm}^2$ angegeben. Für die-

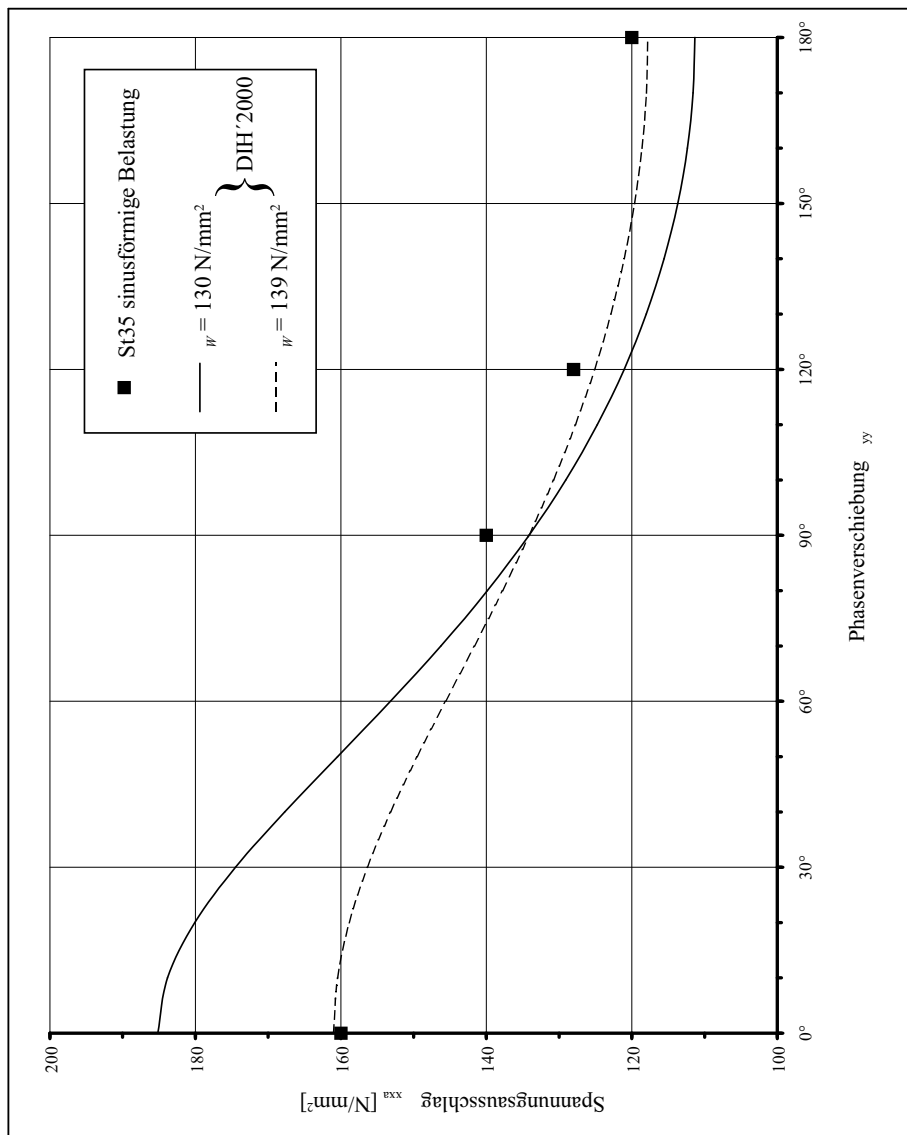


Abbildung 4.3: Einfluß der Phasenverschiebung δ_{yy} bei zwei sinusförmig schwelenden Normalspannungen für unterschiedliche Werkstoffkennwerte τ_W und Versuchsergebnisse von *Bhongbhibhat* [3]

sen Wert wird der ertragbare Spannungsausschlag bei kleinen Phasenverschiebungen deutlich überschätzt, während er für $\delta_{yy} > 90^\circ$ unterschätzt wird. Eine geringfügige Änderung der Torsions-Wechselfestigkeit auf $\tau_W = 139 \text{ N/mm}^2$ hat eine deutlich verbesserte Vorhersage zur Folge. Dieser Wert ergibt sich, wenn die Torsions-Wechselfestigkeit mit Gl.(3.95) abgeschätzt und die Mikro- und Makrostützwirkung herausgerechnet werden. Dieses Beispiel macht deutlich, daß Versuchswerte mit üblichen Abschätzformeln überprüft werden sollten, um Ausreißer zu erkennen und das Versuchsergebnis gegebenenfalls durch weitere Untersuchungen zu bestätigen.

Neben der dreieckförmigen Belastung führte *Bhongbhibhat* auch Versuche mit trapezförmiger Belastung durch. In **Abbildung 4.4** sind die Vorhersagen der Hypothesen dargestellt. Außer der QVH gehen alle Hypothesen von einer kleineren Festigkeit aus, sobald die Belastungen zueinander phasenverschoben schwingen. Bei $\delta_{yy} = 70^\circ$ ist die minimale Festigkeit erreicht und bleibt dann fast konstant. Nur die Ergebnisse der DIH '95 steigen für Phasenverschiebungen $\delta_{yy} > 120^\circ$ wieder an.

Die Versuchsergebnisse und die berechneten Verläufe in den **Abbildungen 4.2, 4.3 und 4.4** verdeutlichen, daß die Form der Last-Zeit-Funktion für Phasenverschiebungen zwischen $\delta_{yy} = 0^\circ$ und $\delta_{yy} = 180^\circ$ erheblichen Einfluß auf die ertragbare Spannungsamplitude besitzt. Dabei ergeben sich für eine dreieckförmige Belastung die größten ertragbaren Werte, während die trapezförmige Belastung die ungünstigste Form darstellt. Dieses Verhalten scheint mit der unterschiedlichen Zeitdauer zusammenzuhängen, während der sich die Belastung auf einem hohen Niveau befindet. Bei der dreieckförmigen Belastung ist das Maximum „idealerweise“ auf einen Punkt beschränkt und die Belastung fällt neben dem Maximum schnell ab. Die größte Werkstoffbeanspruchung tritt erst bei einer Phasenverschiebung $\delta_{yy} = 180^\circ$ auf. Demgegenüber bleibt die Belastung mit sinusförmiger Last-Zeit-Funktion länger auf einem hohen Niveau. Die untere Festigkeitsgrenze wird entsprechend der DIH '95 und der DIH '2000 bei $\delta_{yy} = 160^\circ$ erreicht. Bei einer trapezförmigen Last-Zeit-Funktion schließlich wird der Maximalwert der Amplitude über eine Zeitspanne Δt gehalten. Die Größe von Δt ist abhängig vom Anstiegswinkel der Flanke, der für die Versuche von *Bhongbhibhat* 36° beträgt. Damit hängt auch zusammen, daß die untere Festigkeitsgrenze bereits bei $\delta_{yy} = 2 \cdot 36^\circ = 72^\circ$ erreicht wird. Ab dieser Phasenverschiebung ergibt sich die resultierende Werkstoffbeanspruchung wie bei $\delta_{yy} = 180^\circ$, was am Zeitverlauf der Spannungen leicht abgelesen werden kann. Zum Vergleich wurde der Anstiegswinkel beispielhaft auf 5° geändert und der Verlauf der ertragbaren Spannungsamplitude über der Phasenverschiebung berechnet. Wie erwartet, wird das untere Niveau der ertragbaren Spannungsamplitude bereits bei einer Phasenverschiebung $\delta_{yy} = 2 \cdot 5^\circ = 10^\circ$ erreicht und bleibt dann nahezu konstant.

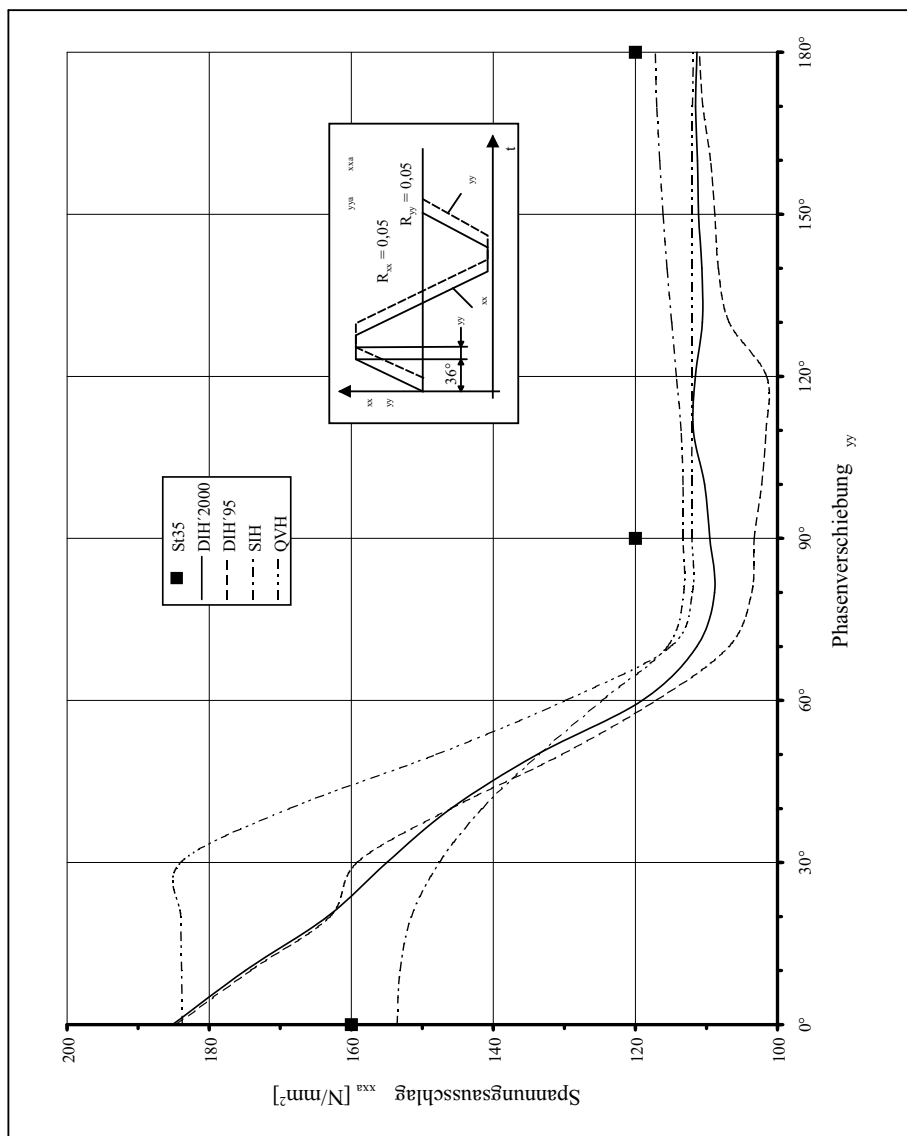


Abbildung 4.4: Einfluß der Phasenverschiebung δ_{yy} bei zwei schwellenden Normalspannungen mit trapezförmiger Schwingungsform und Versuchsergebnissen von *Bhongbhibhat* [3]

In **Kapitel 3.2.2** wurde darauf hingewiesen, daß der Prozeß zur Berechnung der einachsigen Vergleichsspannungs-Amplitude in [21] gegenüber einer Drehung des Koordinatensystems nicht unabhängig ist. In **Abbildung 4.5** sind

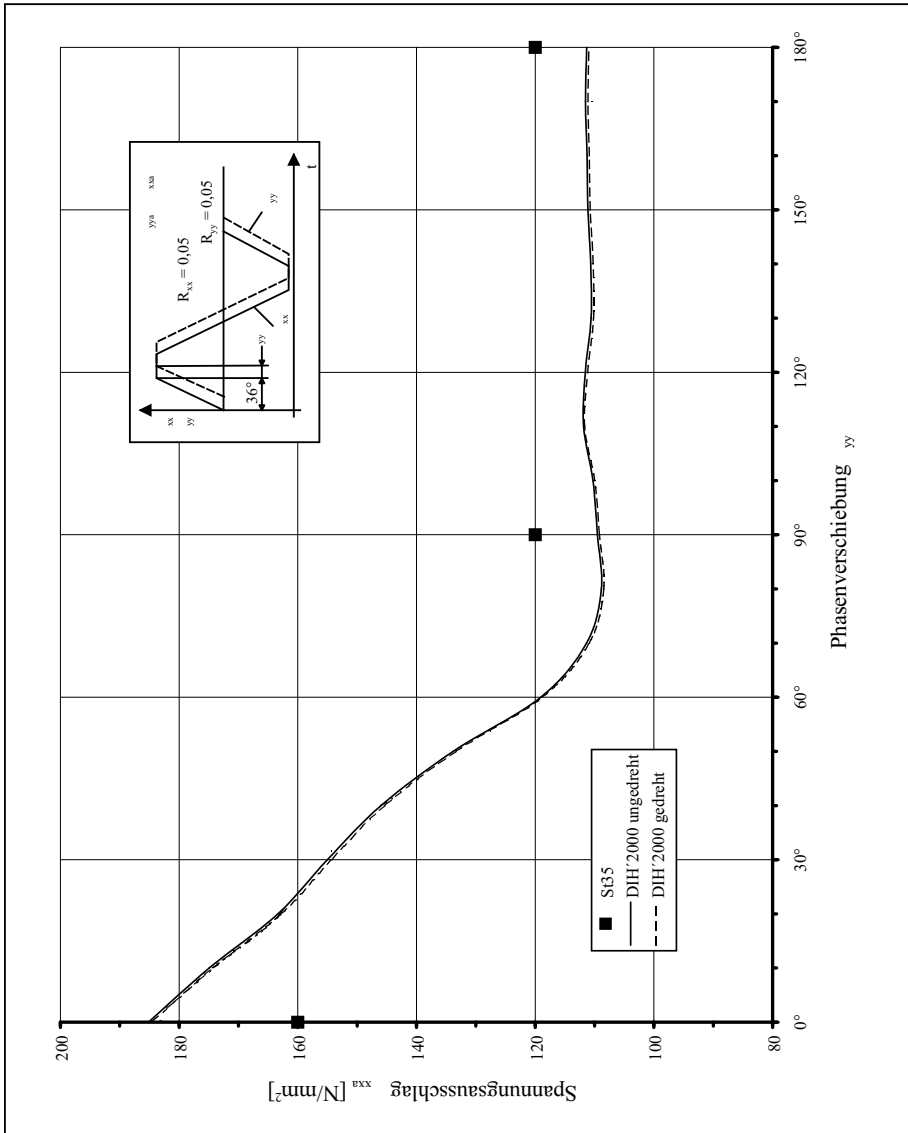


Abbildung 4.5: Einfluß der Phasenverschiebung δ_{yy} für eine trapezförmige Last-Zeit-Funktion berechnet in unterschiedlichen Koordinatensystemen und Versuchsergebnisse von *Bhongbhibhat* [3]

die mit der DIH'2000 berechneten Verläufe für zwei schwellende Normalspannungen mit trapezförmiger Schwingungsform dargestellt. Die Ergebnisse sind

in Schritten $\delta_{yy} = 10^\circ$ berechnet und mit einer geglätteten Linie miteinander verbunden. Für jede Phasenverschiebung wurde die ertragbare Spannungsamplitude in dem ursprünglichen Koordinatensystem und in einem beliebig um die Oberflächennormale gedrehten Koordinatensystem ermittelt. Die Ergebnisse sind fast identisch, womit die Invarianz des neuen vorgestellten Verfahrens gezeigt ist^C.

Von *Heidenreich* u.a. [27] wurde der Einfluß der Form der Last-Zeit-Funktion für eine wechselnde Normal- und eine wechselnde Schubspannung untersucht. Die berechneten Verläufe und Versuchsergebnisse sind in **Abbildung 4.6** für eine sinusförmige und in **Abbildung 4.7** für eine trapezförmige Last-Zeit-Funktion dargestellt. Bei der Bewertung der Treffsicherheit der Hypothesen ist der unterschiedliche Maßstab des Spannungsausschlags σ_{xxa} für die beiden Abbildungen zu beachten!

Die Versuchsergebnisse der sinusförmigen Belastung (**Abbildung 4.6**) sind mit 314 N/mm^2 für $\delta_{xy} = 0^\circ$, 315 N/mm^2 für $\delta_{xy} = 60^\circ$ und 316 N/mm^2 für $\delta_{xy} = 90^\circ$ fast konstant. Dieses Verhalten wird von der DIH '2000 und der DIH '95, deren Ergebnisse für diesen Belastungsfall identisch sind, am besten vorhergesagt. Die Ergebnisse der SIH und der QVH liegen für eine Phasenverschiebung von 90° weiter auf der unsicheren Seite.

In **Abbildung 4.7** —trapezförmige Belastung— wurde zum Vergleich das Versuchsergebnis für $\delta_{xy} = 0^\circ$ von der sinusförmigen Belastung übernommen. Wiederum ist zu erkennen, daß diese Schwingungsform —der Anstiegswinkel beträgt 15° — eine deutliche Verringerung der ertragbaren Spannungsamplitude bei einer Phasenverschiebung von $\delta_{xy} = 90^\circ$ zur Folge hat. Außer der QVH gehen alle Hypothesen von einer Festigkeitsminderung aus, die bei ungefähr $\delta_{xy} = 30^\circ$ ihr Minimum erreicht und dann nahezu konstant bleibt. Hiervon abweichend wird von der DIH '2000 oberhalb einer Phasenverschiebung $\delta_{xy} = 60^\circ$ eine kleine Festigkeitssteigerung vorhergesagt. Besonders auffällig ist das Ergebnis der QVH. Sie zeigt keinen Einfluß der Phasenverschiebung und liefert für die synchrone Belastung nicht das Ergebnis der sinusförmigen Belastung. Für $\delta_{xy} = 90^\circ$ wird der ertragbare Spannungsausschlag von allen Hypothesen im Mittel um 12% überschätzt.

^CDie minimalen Unterschiede sind auf das in **Kapitel 3.2.2** beschriebene Verfahren zurückzuführen

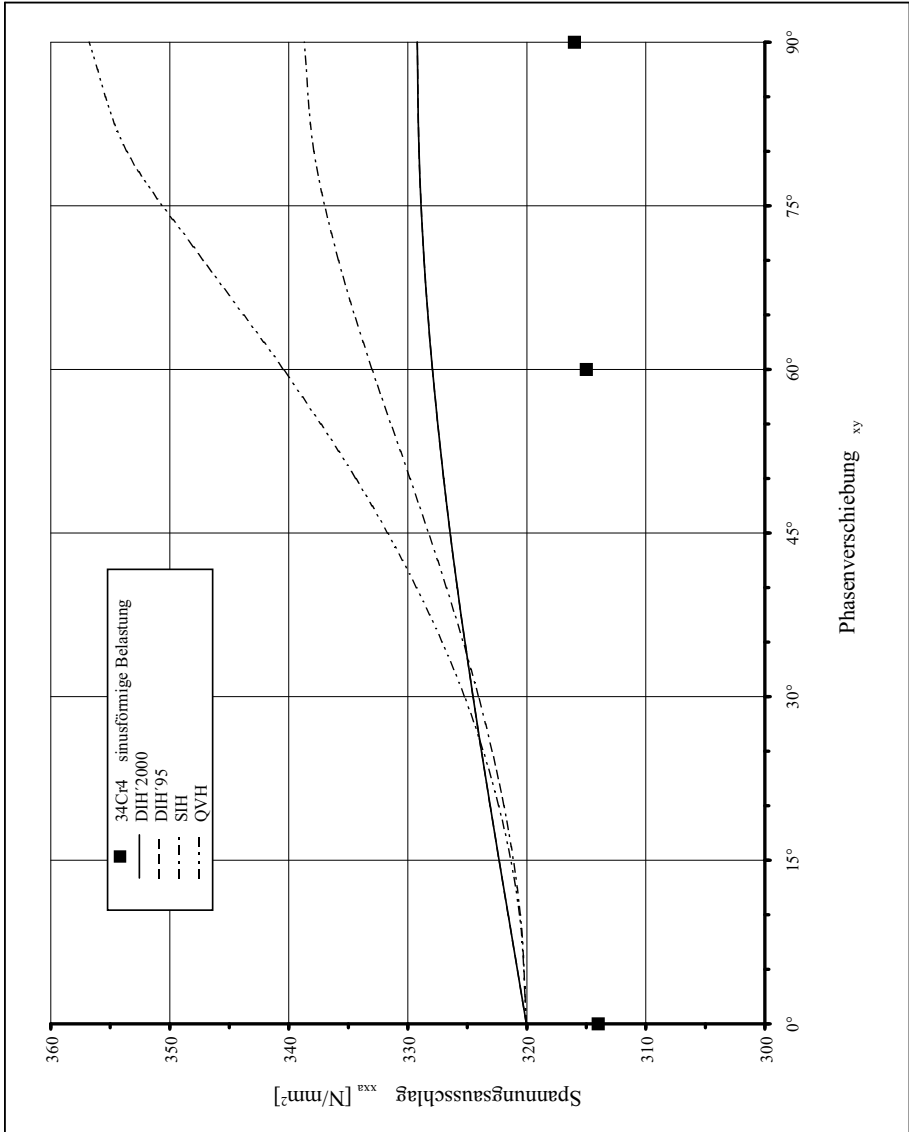


Abbildung 4.6: Einfluß der Phasenverschiebung δ_{xy} bei einer wechselnden Normal- und einer wechselnden Schubspannung mit sinusförmiger Schwingungsform und Versuchsergebnissen von *Heidenreich* u.a. [27]

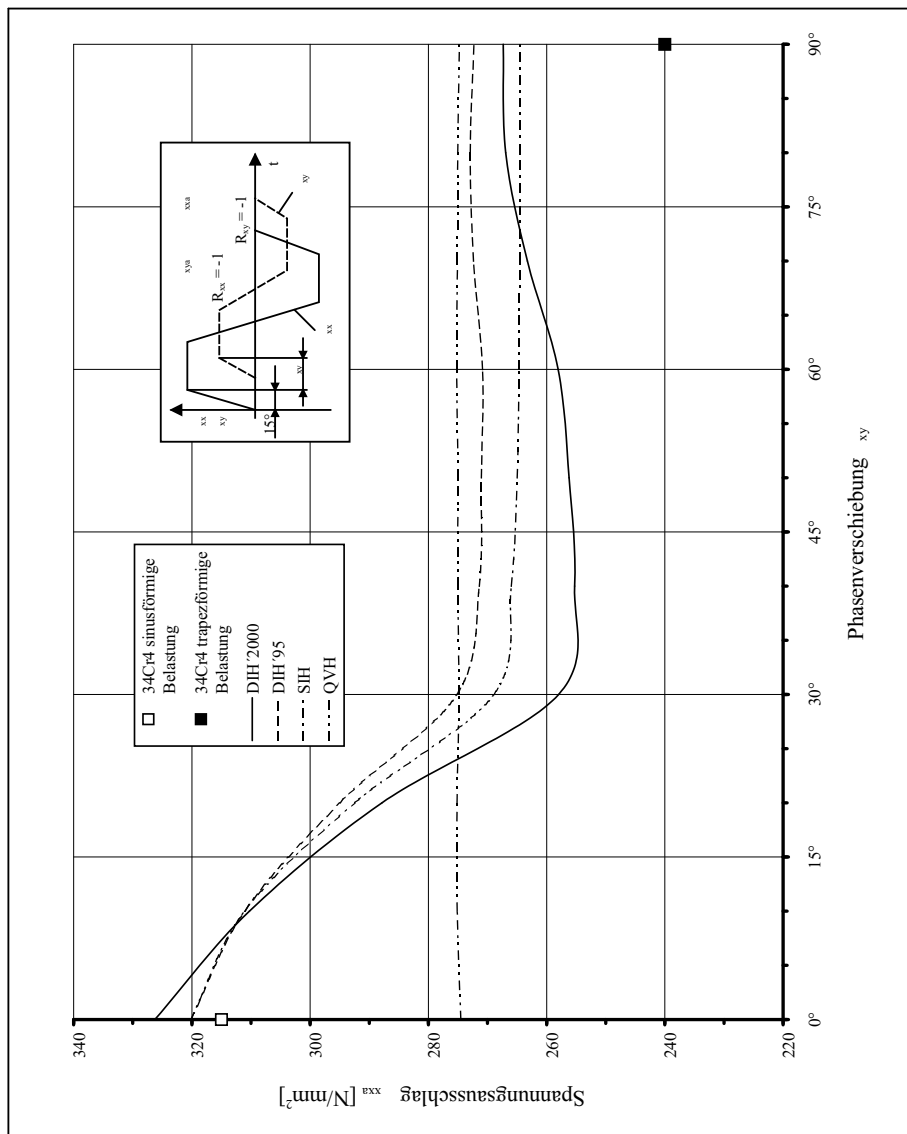


Abbildung 4.7: Einfluß der Phasenverschiebung δ_{xy} bei einer wechselnden Normal- und einer wechselnden Schubspannung mit trapezförmiger Schwingungsform und Versuchsergebnissen von *Heidenreich* u.a. [27]

4.1.2 Zeitfestigkeit ungekerbter Bauteile

Für Lebensdaueraussagen im Zeitfestigkeitsbereich werden die Ergebnisse der DIH'2000 mit denen der DIH'95 und denen der FKM-Richtlinie [19] sowohl für ungekerbte als auch für gekerbte Bauteile verglichen. Die SIH und die QVH gelten nur für den Dauerfestigkeitsbereich.

Für die Belastungskombination aus Zug-Druck und überlagerter phasenverschobener Torsion liegen im Zeitfestigkeitsbereich nur wenige Versuchsergebnisse vor. *Sonsino* [60] untersuchte den Einfluß der Phasenverschiebung für den Werkstoff StE 460. Er beschränkte die Variation der Phasenverschiebung auf die beiden Fälle einer synchronen $\delta_{xy} = 0^\circ$ und einer 90° phasenverschobenen Belastung, da erfahrungsgemäß bei zähen Werkstoffen hierfür die größten Lebensdauerunterschiede ermittelt werden können. Er ermittelte Ergebnisse sowohl für last- als auch für verformungsgesteuerte Versuche.

In den beiden **Abbildungen 4.8** und **4.9** sind die Ergebnisse der lastgesteuerten Versuche der überlagerten Belastung für $\delta_{xy} = 0^\circ$ und $\delta_{xy} = 90^\circ$ dargestellt. Die Versuchsergebnisse ergeben eine Verlängerung der Lebensdauer unter phasenverschobener Belastung, was von der DIH'2000 und der DIH'95 ebenfalls vorhergesagt wird. Demgegenüber wird von der FKM-Richtlinie eine deutliche Minderung der ertragbaren Belastung für den phasenverschobenen Fall vorhergesagt. Außerdem wird die Steigung der Wöhlerlinien in beiden Fällen deutlich überschätzt. Die in der Richtlinie empfohlene Obergrenze der zulässigen Amplituden führt zu einer sehr konservativen Abschätzung, die selbst bei synchroner Belastung (**Abbildung 4.8**) die Versuchsergebnisse für $N < 1 \cdot 10^5$ unterschätzt.

Die Ergebnisse der DIH'2000 und der DIH'95 unterscheiden sich nur sehr gering voneinander. Auffällig ist der Unterschied in der berechneten Steigung der Wöhlerlinien für $\delta_{xy} = 0^\circ$. Verantwortlich hierfür sind die verschiedenen Ansätze zur Berechnung der Makrostützwirkung. Von *Sonsino* wird der mittlere Wöhlerlinienexponent (Zug-Druck-, Torsions- und zusammengesetzte Belastungen) mit $k = 17$ angegeben. Dieser Wert wird sowohl bei der DIH'2000 als auch der DIH'95 als Exponent der Werkstoffwöhlerlinie für reine Zug-Druck-Belastung verwendet. Für die zusammengesetzten Belastungen ergeben sich damit nach der DIH'2000 die mittleren Exponenten $k = 17,3$ für $\delta_{xy} = 0^\circ$ und $k = 18,6$ für $\delta_{xy} = 90^\circ$, während die Werte nach der DIH'95 $k = 15,7$ und $k = 19,0$ betragen. Daraus ergibt sich, daß von der DIH'95 bei Phasenverschiebungen bereits für Lastwechselzahlen $N < 4 \cdot 10^5$ ein kleinerer ertragbarer Nennspannungsausschlag als für $\delta_{xy} = 0^\circ$ vorhergesagt wird, was aber durch die Versuchsergebnisse nicht bestätigt wird. Hingegen wird dieser „Umschlagpunkt“ nach der DIH'2000 erst bei einer Lastwechselzahl $N \approx 1 \cdot 10^4$ erreicht.

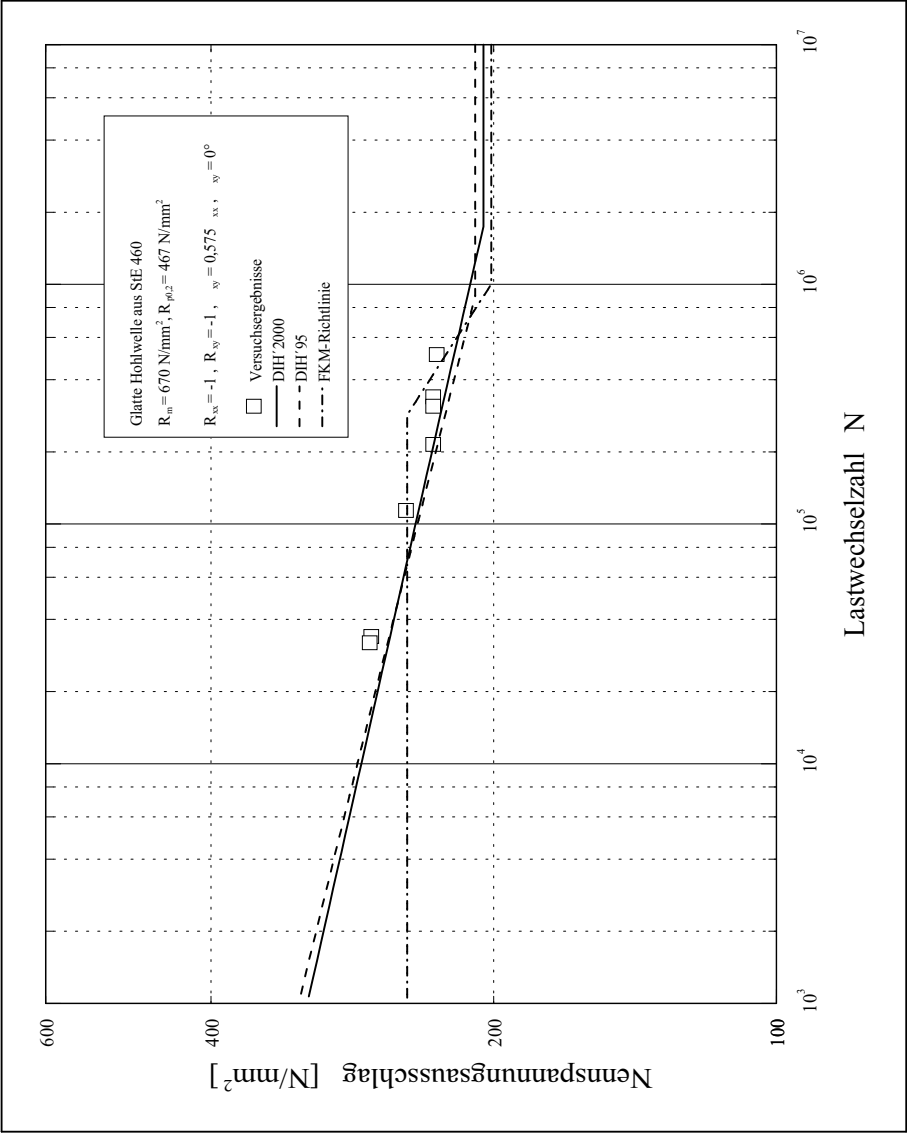


Abbildung 4.8: Vergleich von berechneten Wöhlerlinien mit Versuchsergebnissen von *Sonsino* [60] für einen glatten Hohlstab unter überlagerter Zug- und Torsionsbelastung bei 0° Phasenverschiebung

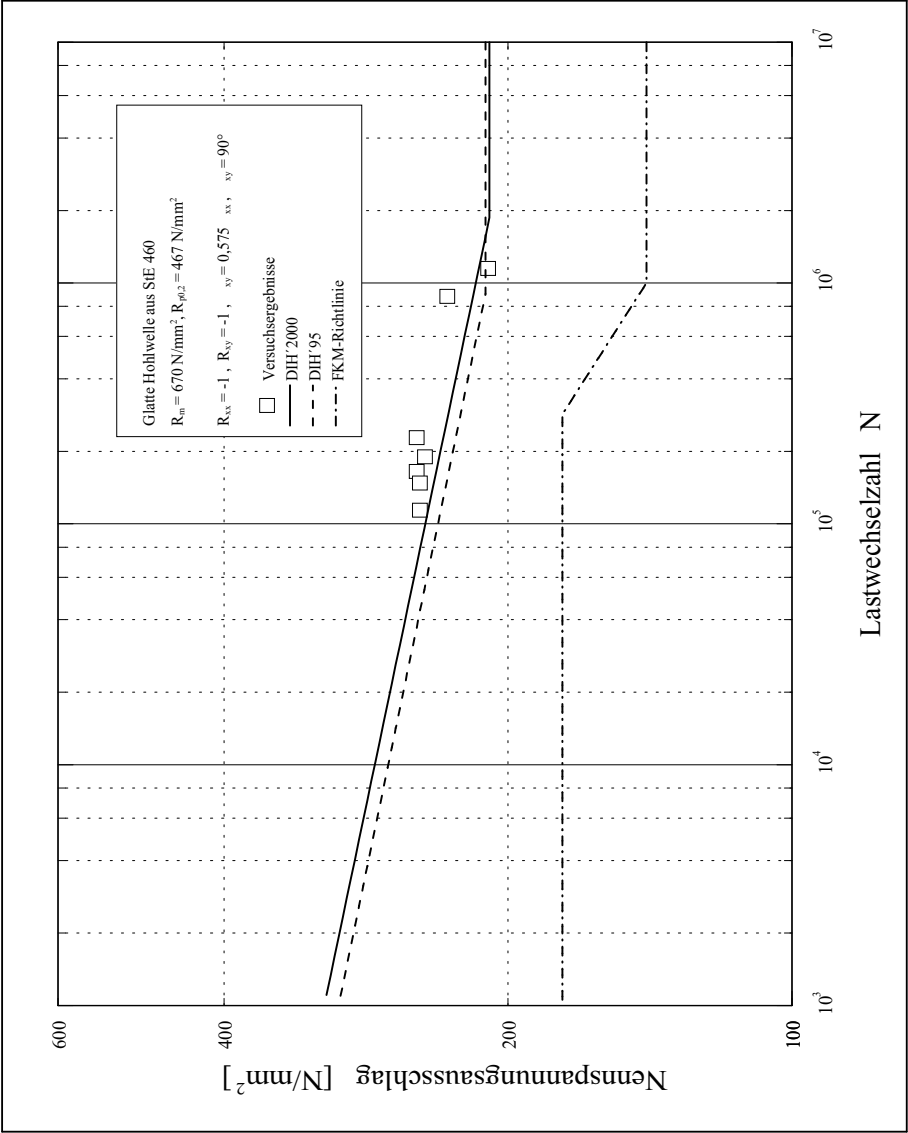


Abbildung 4.9: Vergleich von berechneten Wöhlerlinien mit Versuchsergebnissen von *Sonsino* [60] für einen glatten Hohlstab unter überlagerter Zug- und Torsionsbelastung bei 90° Phasenverschiebung

4.2 Gekerbte Bauteile

Während im vorangegangenen **Kapitel 4.1** die allgemeine Gültigkeit der Vergleichsspannungs-Zeitfunktion für Festigkeitsaussagen vor allem im Dauerfestigkeitsgebiet im Vordergrund stand, wird im folgenden die Anwendbarkeit der vorgestellten Konzepte bei der Lebensdauerbewertung gekerbter Bauteile gezeigt. Grundlage der Bewertung sind die lokalen elastischen Spannungszustände, die als Ergebnis einer linearelastischen FEM-Berechnung für jede Belastung vorliegen. Darüber hinaus werden die Last-Zeit-Funktionen der einzelnen Belastungen als bekannt angenommen.

In **Kapitel 4.2.1** werden die Ergebnisse der DIH '2000 und die der DIH '95 sowie der FKM-Richtlinie im wesentlichen qualitativ mit den Versuchsergebnissen verglichen. In **Kapitel 4.2.2** wird anhand von zwei Beispielen noch einmal der Weg der Lebensdauerberechnung mit der DIH '2000 erläutert und ein quantitativer Vergleich zwischen den Versuchsergebnissen und den berechneten Lebensdauern vorgenommen.

4.2.1 Spannungs-Wöhlerlinien gekerbter Bauteile

Die Ergebnisse der drei Hypothesen werden für unterschiedliche Stabformen (Flach- bzw. Rundstab) und Kerbgeometrien (abgesetzte bzw. gekerbte Stäbe) mit den Versuchsergebnissen verglichen. Dabei werden sowohl sehr scharf gekerbte Bauteile $\rho = 0,25 \text{ mm}$ als auch schwach gekerbte Bauteile $\rho = 5 \text{ mm}$ betrachtet. Neben den rein wechselnden Belastungen wird der Einfluß überlagerter Mittelspannungen sowie der Phasenverschiebung zwischen Normal- und Schubspannungen untersucht.

In **Abbildung 4.10** sind die Ergebnisse von *Haibach* und *Matschke* [24] für einen Flachstab aus 42CrMo4V unter wechselnder Zug-Druckbelastung ($R = -1$) dargestellt. Der Kerbradius der Probe beträgt $\rho = 2 \text{ mm}$. Bei diesen Flachstäben werden die Kerben durch Innenbohrungen hergestellt. Von den Autoren wird eine Kerbformzahl $\alpha_{kz} = 3,6$ angegeben, die den Berechnungen mit der DIH '95 und der FKM-Richtlinie zu Grunde liegt.

In der Abbildung sind zum Vergleich auch die Versuchsergebnisse des glatten Stabes eingetragen. Da weder durch die Geometrie noch durch die Belastungsart Stützwirkungen aktiviert werden können und die Belastung global wie lokal einachsig ist, sind die Ergebnisse der DIH '2000 und der DIH '95 identisch. Die vorhergesagte Wöhlerlinie und das Dauerfestigkeitsniveau stimmen mit den Versuchsergebnissen sehr gut überein. Dies gilt auch für die Vorhersage des Dauerfestigkeitsniveaus durch die FKM-Richtlinie, während die Steigung der FKM-Wöhlerlinie viel zu groß ist.

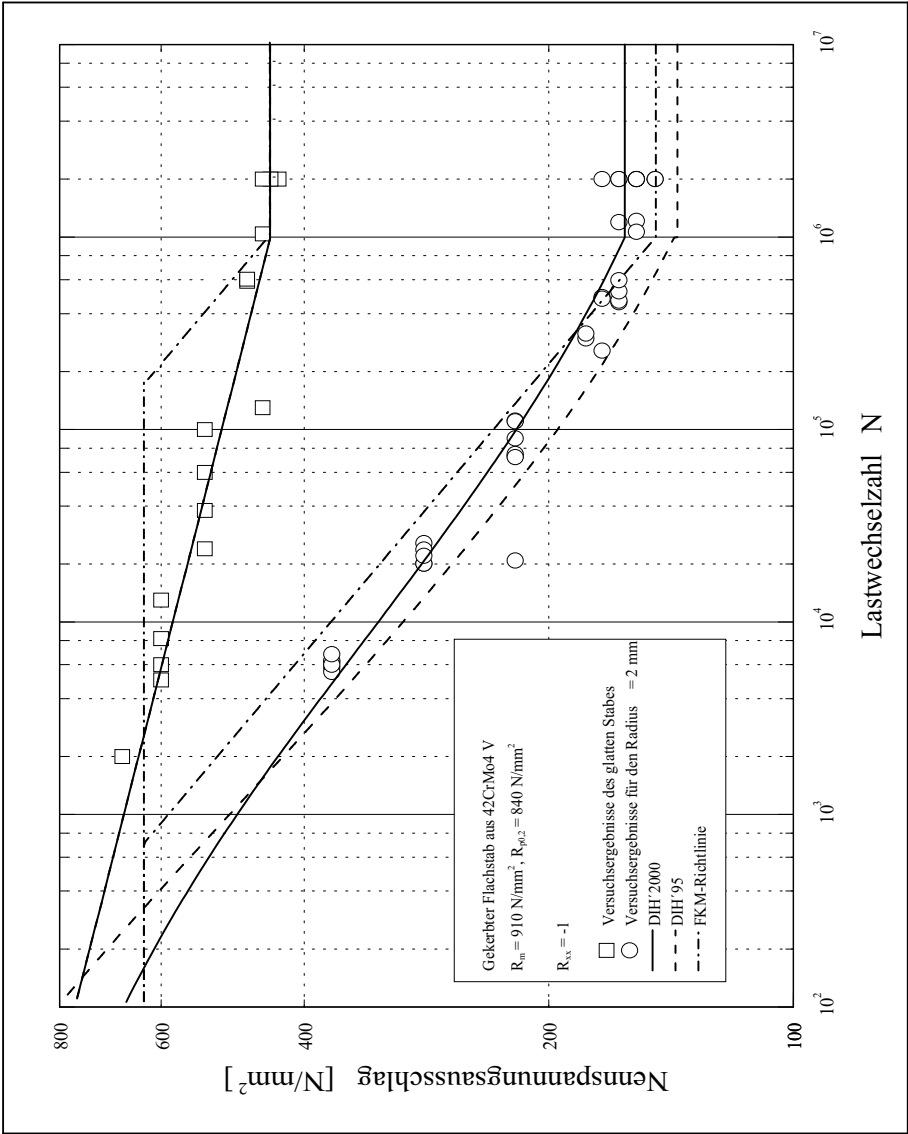


Abbildung 4.10: Vergleich von berechneten Wöhlerlinien mit Versuchsergebnissen von *Haibach* und *Matschke* [24] für einen glatten und einen gekerbten Flachstab unter wechselnder Zug-Druckbelastung

Für den gekerbten Flachstab wurden für die Berechnung mit der DIH'2000 zwei FEM-Berechnungen durchgeführt. Um die Fließbehinderung zu ermitteln,

wurde der Spannungszustand unter der Annahme eines ebenen Dehnungszustandes zweidimensional berechnet (s. **Kapitel 3.3.2**). Die mit Gl.(3.56) definierte Güte der Berechnung beträgt $G = 0,3\%$. Der berechnete Wert $\varphi = 1,52$ ist etwas kleiner als der bei der DIH '95 mit der Schätzgleichung von *Hahn* verwendete Wert von $\varphi = 1,68$, so daß die Steigung der Wöhlerlinie etwas kleiner wird. In einer zweiten FEM-Berechnung wurde der Stab mit Volumenelementen aufgebaut. Die Genauigkeit der Berechnung ist $G = 0,9\%$. Die höchstbeanspruchte Stelle befindet sich in der Mitte der Stabdicke, was mit dem experimentell beobachteten Versagensort übereinstimmt. Die Kerbformzahl der FEM-Berechnung ist mit $\alpha_k = 2,97$ deutlich kleiner als der in [24] angegebene Wert. Auf Grund der behinderten Querkontraktion herrscht im höchstbeanspruchten Punkt ein zweiachsiger Spannungszustand. Für die Bewertung mit der DIH '2000 wird deshalb die Torsions-Wechselfestigkeit benötigt und mit Gl.(3.95) unter Beachtung der Stützwirkungen abgeschätzt. Im Gegensatz dazu werden die mit der DIH '95 und der FKM-Richtlinie vorhergesagten Wöhlerlinien, wie bisher üblich, einachsig berechnet. Die elastische Kerbgrundspannung wird aus der Nennspannung und der angegebenen Kerbformzahl ermittelt. Diese Vorgehensweise gilt für alle im folgenden dargestellten Wöhlerlinien.

Die experimentellen Werte werden von der DIH '2000 am besten erfaßt. Die Dauerfestigkeit wird von der DIH '95 und der FKM-Richtlinie geringfügig unterschätzt. Im Zeitfestigkeitsbereich wird die Steigung der Wöhlerlinie im Mittel von der DIH '95 am besten erfaßt, während sie von der FKM-Richtlinie über- und der DIH '2000 unterschätzt wird. Im Gegensatz zur FKM-Richtlinie, die hinsichtlich der Steigung der Wöhlerlinie nicht zwischen glatten und gekerbten Bauteilen unterscheidet, gehen die anderen beiden Hypothesen grundsätzlich von einem steileren Anstieg gekerbter Bauteile gegenüber glatten Bauteilen aus, was auch experimentell bestätigt wird. Grund hierfür sind die inhomogenen Spannungsverteilungen und die damit verbundenen lokalen Fließvorgänge. Wird die Belastung gesteigert, wächst die Makrostützwirkung überproportional, so daß die lokalen Spannungen in geringerem Maße als die elastischen Kerbgrundspannungen wachsen.

Im Kurzzeitfestigkeitsbereich fällt auf, daß die DIH '95 von einer höheren Festigkeit als die des glatten Stabes ausgeht. Eine experimentelle Bestätigung hierfür fehlt jedoch.

Für den Stahl 34CrNiMo6 V wurden von *Liebrich* [34] Zeitfestigkeitsversuche durchgeführt. Er belastete die Rundstäbe rein wechselnd und schwellend. Außerdem variierte er den Kerbradius und den Vergütungszustand. Die Versuchsergebnisse für den glatten und den mit $\rho = 0,25 \text{ mm}$ gekerbten Rundstab sind in **Abbildung 4.11** für eine rein wechselnde Zug-Druckbelastung und in **Abbildung 4.12** für eine schwellende Zug-Druckbelastung dargestellt, wobei der Vergütungszustand eine Härte von 445HB30 aufweist. Das FEM-

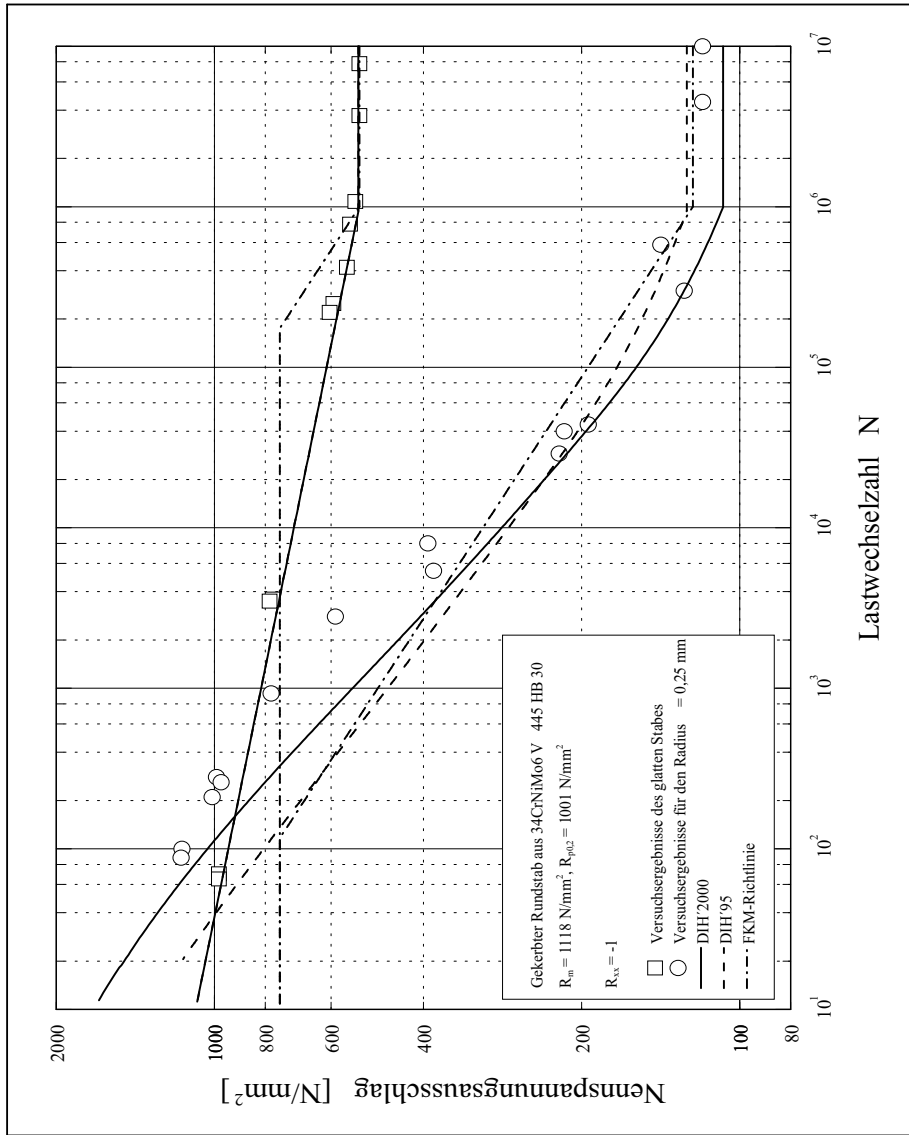


Abbildung 4.11: Vergleich von berechneten Wöhlerlinien mit Versuchsergebnissen von *Liebrich* [34] für einen glatten und einen gekerbten Rundstab unter wechselnder Zug-Druckbelastung

Ergebnis dieses gekerbten Rundstabes hat eine Genauigkeit von $G = 0,003\%$ im Punkt der höchsten, modifizierten *von Mises*-Beanspruchung und die berechnete Kerbformzahl $\alpha_{kz} = 5,25$ entspricht dem von *Liebrich* angegebenen

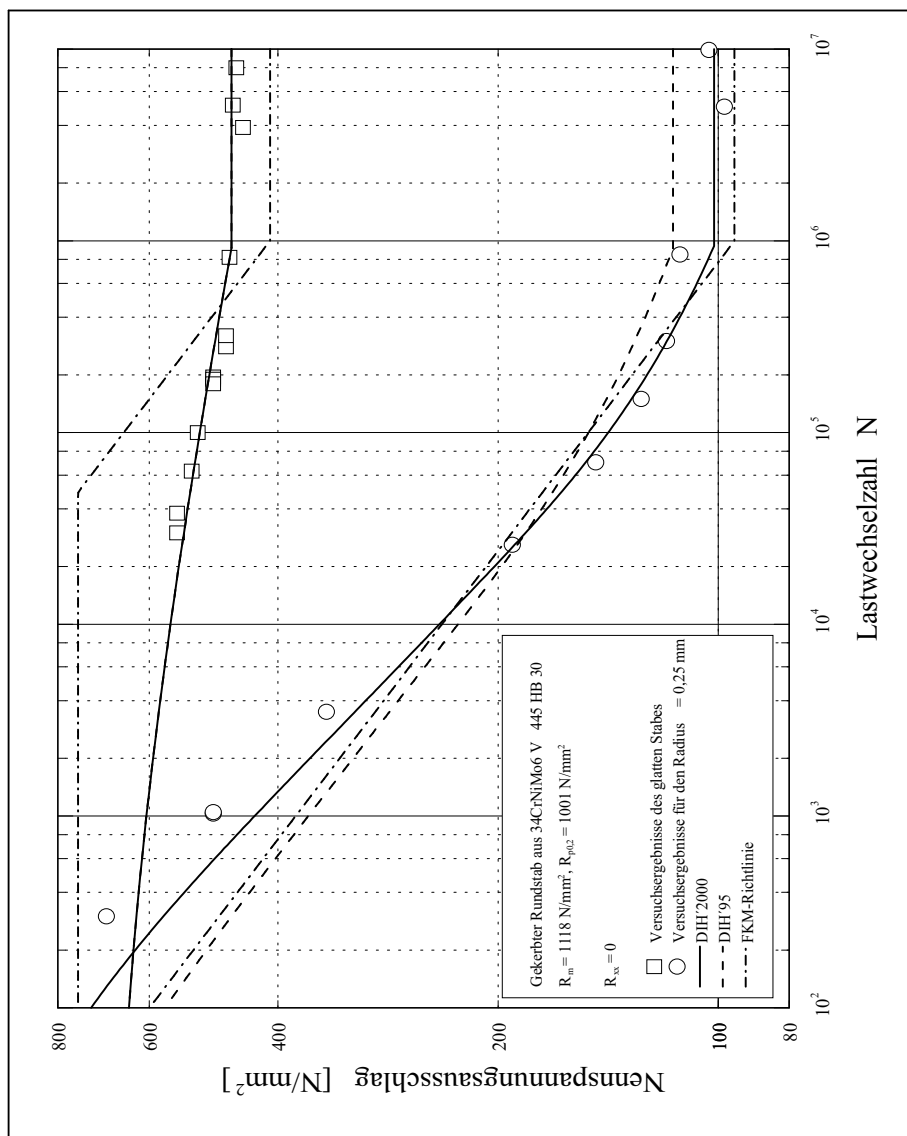


Abbildung 4.12: Vergleich von berechneten Wöhlerlinien mit Versuchsergebnissen von *Liebrich* [34] für einen glatten und einen gekerbten Rundstab unter schwellender Zug-Druckbelastung

Wert $\alpha_{kz} = 5, 2$.

Die Ergebnisse der DIH'2000 und der DIH'95 sind für den glatten Stab aus

den oben genannten Gründen wiederum identisch. Sowohl für die wechselnde als auch für die schwellende Belastung werden die Versuchsergebnisse sehr genau vorhergesagt. Von der FKM-Richtlinie hingegen wird nur das Dauerfestigkeitsniveau bei wechselnder Belastung richtig erfaßt. Die Steigungen der FKM-Wöhlerlinien sind für den glatten Rundstab wiederum zu groß, während sie für den gekerbten Rundstab zu klein sind. Sie unterscheiden sich auch grundsätzlich nicht bei wechselnden und schwellenden (mittelspannungsbehafteten) Belastungen. Bei der wechselnden Belastung fällt außerdem auf, daß die von der FKM-Richtlinie geforderte obere Grenze des ertragbaren Spannungsausschlags deutlich unter den Versuchsergebnissen liegt.

Für die gekerbten Proben kommt die Vorhersage der DIH '2000 den Versuchsergebnissen für beide Belastungsfälle am nächsten. Bei der wechselnden Belastung wird das Dauerfestigkeitsniveau geringfügig unterschätzt, während es bei der schwellenden Belastung identisch mit den Versuchsergebnissen ist. Die größte Steigung im Zeitfestigkeitsbereich liefert für beide Belastungsfälle die DIH '2000. Im Vergleich zu den Versuchsergebnissen sind die berechneten Steigungen im Bereich von 10^3 bis 10^5 Lastwechseln immer noch etwas zu klein.

Neben der Kerbformzahl α_k stimmt die für diesen Stab mit der DIH '95 abgeschätzte Fließbehinderung $\varphi = 2,08$ sehr gut mit der aus der FEM-Berechnung ermittelten Größe $\varphi = 2,03$ überein. Die Mikrostützziffern (DIH '95: $n_{H,1a}^2 = 1,096$; DIH '2000: $n_{V,1a} = 1,074$ und $n_{V,2a} = 0,965$) liegen trotz des geringen Kerbradius nahe bei Eins, da die Ersatzstrukturlänge $\rho^* = 0,026 \text{ mm}$ auf Grund der hohen Zug-Druck-Wechselfestigkeit $\sigma_W = 530 \text{ N/mm}^2$ und Schwellfestigkeit $\sigma_{schw} = 922 \text{ N/mm}^2$ sehr klein ist. Die steilere Wöhlerlinie der DIH '2000 ist demnach auf die mehrachsige Berechnung und das unterschiedliche Makrostützwirkungskonzept zurückzuführen. Für die Dauerfestigkeit sind die beiden Makrostützziffern ungefähr gleich groß, während im Zeitfestigkeitsbereich die Makrostützziffer der DIH '2000 bei gleicher Lastwechselzahl größer ist. Für niedrige Nennspannungsausschläge liegen die Ergebnisse der DIH '2000 trotzdem über denen der DIH '95, weil das Quadrat des Wechselfestigkeits-Verhältnisses kleiner zwei ist, so daß die resultierende Vergleichsspannungs-Amplitude der DIH '2000 größer ist als die der DIH '95. Erst für höhere Nennspannungsausschläge und damit für niedrigere Lastwechselzahlen kehrt sich das Verhältnis um, da k_{aN}^2 entsprechend Gl.(3.20, 3.21) gegen drei strebt.

Aus den Versuchsergebnissen geht ebenfalls hervor, daß die Steigung im Zeitfestigkeitsbereich nicht konstant ist. Beginnend bei der Ecklastspielzahl wird die Wöhlerlinie zunächst steiler und flacht dann bei ungefähr 10^3 Lastwechseln wieder ab. Dieser S-Schlag ist für die wechselnde Belastung besonders ausgeprägt und wird von der DIH '2000 auch so berechnet. Im Bereich hoher Lastwechselzahlen wird dieses Verhalten durch den oben beschriebenen überproportionalen Anstieg der Makrostützwirkung hervorgerufen. Im Kurzzeitfestigkeitsbereich

hingegen wird der Anstieg der Makrostützwirkung wieder kleiner, so daß die Wöhlerlinie flacher verläuft.

Die überlagerte Mittelspannung hat kaum Einfluß auf das Dauerfestigkeitsniveau, was von allen drei Hypothesen bestätigt wird. Im Zeitfestigkeitsbereich führt diese Überlagerung aber zu einer gegenüber der wechselnden Belastung flacheren Wöhlerlinie, weil die Mittelspannungsempfindlichkeit für kleinere Lastwechselzahlen steigt und damit auch nur kleinere Amplituden ertragen werden. Dieser Einfluß wird von der DIH '2000 und der DIH '95 berücksichtigt, während die FKM-Richtlinie die beiden Belastungsfälle nicht unterscheidet.

Baier [1] führte Versuche an einem Rundstab mit Umdrehungskerbe aus 34CrMo4 unter wechselnder und schwellender Zug-Druckbelastung durch. Diesen Belastungen überlagerte er konstante Zug- und Torsionsmittelspannungen. Der Kerbradius beträgt $\rho = 0,5 \text{ mm}$ und vom Autor werden die Kerbformzahlen mit $\alpha_{kz} = 3,4$ für Zug und $\alpha_{kt} = 1,9$ für Torsion angegeben. Zum Vergleich ergibt sich aus der FEM-Berechnung: $\alpha_{kz} = 3,76$ und $\alpha_{kt} = 2,04$. Die Güte der Berechnung beträgt für die Zugbelastung $G_{Zug} = 0,06\%$, während für die Torsionsbelastung die Radialspannung im Kerbgrund mit $\sigma_{rr} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ N/mm}^2$ vernachlässigt werden kann, da die erste Hauptspannung für diesen Belastungsfall mit $\sigma_1 = 204 \text{ N/mm}^2$ wesentlich größer ist.

Beispielhaft sind die Versuchsergebnisse und die berechneten Wöhlerlinien für eine wechselnde Zug-Druckbelastung mit überlagerter konstanter Zugmittelspannung in **Abbildung 4.13** und mit überlagerter konstanter Torsionsmittelspannung in **Abbildung 4.14** dargestellt. Die Ergebnisse für eine schwellende Zugbeanspruchung mit wiederum überlagerter konstanter Torsionsmittelspannung zeigt **Abbildung 4.15**.

Im Gegensatz zu den bisherigen Ausführungen ist das Spannungsverhältnis R für die Versuchsergebnisse von *Baier* nicht konstant, da die überlagerte Mittelast für alle Nennspannungsausschläge konstant ist. Die Mikrostützziffern und die Fließbehinderung der Oberspannung bei überlagerter Torsionsmittelspannung müssen daher einzeln für verschiedene Lasthorizonte berechnet werden. Darüber hinaus ist auch das untere Niveau der modifizierten *Neuber*-Hyperbel nicht entsprechend der Amplitudenerhöhung skalierbar, so daß zur Vorhersage der gesamten Wöhlerlinie ein größerer numerischer Aufwand notwendig ist.

Die nach *Hahn* abgeschätzte maßgebliche Fließbehinderung der Amplitude ist mit $\varphi_a = 1,99$ deutlich größer als der Wert aus der FEM-Berechnung $\varphi_a = 1,88$. Auch die Mikrostützziffer der ersten Invariante nach *Hahn* $n_{H,1a}^2 = 1,19$ ist größer als der Wert des Volumenkonzepts $n_{V,1a} = 1,07$, was im Zusammenhang mit dem Wechselfestigkeits-Verhältnis $k_a = 1,488$ das niedrigere Dauerfestigkeitsniveau der DIH '2000 gegenüber der DIH '95 für alle berechneten Wöhlerlinien erklärt.

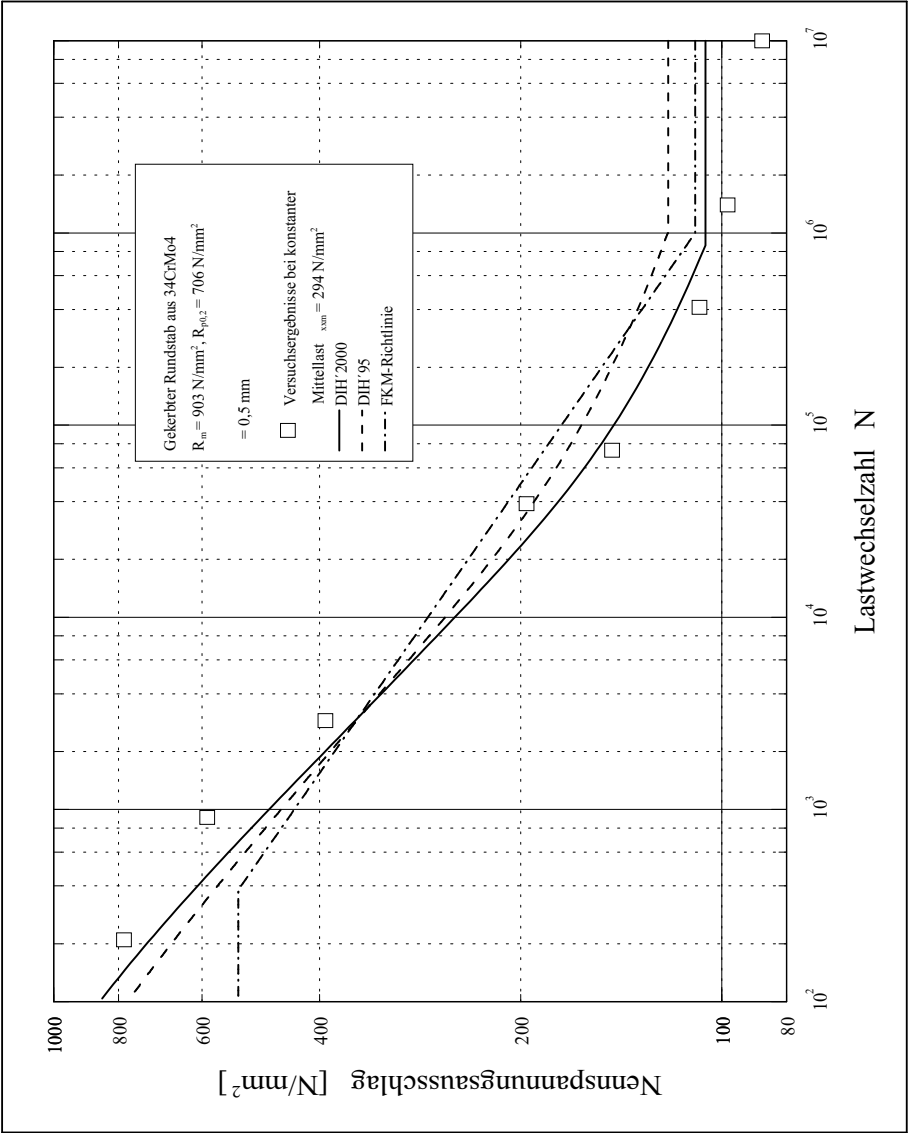


Abbildung 4.13: Vergleich von berechneten Wöhlerlinien mit Versuchsergebnissen von *Baier* [1] für einen gekerbten Rundstab unter Zugwechselbelastung mit überlagerter konstanter Zugmittellast

Das Dauerfestigkeitsniveau der berechneten Wöhlerlinien in **Abbildung 4.13** für den wechselnd mit überlagerter konstanter Zugmittellast beanspruchten

Stab wird von allen drei Hypothesen leicht überschätzt. Da die Versuchsergebnisse keinen eindeutigen Rückschluß auf die Ecklastspielzahl zulassen, wird bei der Berechnung mit den drei Hypothesen von einer geschätzten Ecklastspielzahl $N = 1 \cdot 10^6$ ausgegangen. Im Zeitfestigkeitsbereich ist wiederum der oben beschriebene S-Schlag zu erkennen, den die DIH '2000 am besten vorhersagt. Die konstante Steigung von $k = 5$, die von der FKM-Richtlinie angenommen wird, kann das Zeitfestigkeitsverhalten nur im Mittel erfassen. Im Bereich hoher Lastwechselzahlen wird die Festigkeit überschätzt und für niedrige Lastwechselzahlen unterschätzt. Bedingt durch die obere Grenze werden die Versuchsergebnisse für $N < 10^3$ deutlich zu konservativ bewertet. Abgesehen von der zu großen Dauerfestigkeit zeigt die DIH '95 im Zeitfestigkeitsbereich einen qualitativ ähnlichen Verlauf wie die DIH '2000.

Bei wechselnder Zug-Druckbelastung mit überlagerter konstanter Torsionsmittellast, was dem in der Praxis häufig auftretenden Fall einer mit einem Drehmoment und Umlaufbiegung belasteten Welle nahekommt, liefert die DIH '95 die besten Ergebnisse (**Abbildung 4.14**). Die mit der FKM-Richtlinie vorhergesagte Steigung der Wöhlerlinie stimmt für diesen Fall gut mit den Versuchen überein. Wiederum aber wird die Festigkeit unterhalb von 10^3 Lastwechseln deutlich unterschätzt. Die DIH '2000 hingegen liegt mit ihrer Vorhersage bis in den Kurzzeitfestigkeitsbereich auf der sicheren Seite.

Die Versuchsergebnisse und die berechneten Wöhlerlinien aller drei Hypothesen in **Abbildung 4.14** zeigen im Vergleich zu **Abbildung 4.13**, daß Torsionsmittelspannungen einen geringeren Einfluß auf den ertragbaren Nennspannungsausschlag haben als Normalmittelspannungen. Erklären läßt sich dieses Verhalten einerseits mit der geringen Kerbwirkung bei Torsion und andererseits durch die größere Makrostützwirkung, die durch die belastungsbedingte ungleichmäßige Spannungsverteilung hervorgerufen wird.

Bedingt durch die konstante Torsionsmittelspannung sind die Größen n_{2o} , φ_o und $n_{2o,makro}$ bei der Berechnung mit der DIH '2000 nicht konstant. In **Tabelle 4.1** sind die Stützziffer $n_{2o,makro}$ der zweiten Oberspannungsinvariante $\hat{I}_{2o}(t_0)$, das untere Niveau der modifizierten *Neuber-Hyperbel* $\hat{\sigma}_{o,mod.Mises}$ und die Fließbehinderung der Oberspannung φ_o für verschiedene Kerbspannungsamplituden $\hat{\sigma}_{xxa}$ zusammengefaßt. Ihnen sind zum Vergleich die Werte der DIH '95 gegenübergestellt und für die Fließbehinderung zusätzlich der mit Gl.(3.103) und Gl.(3.106) abgeschätzte Wert.

Bei der Stützziffer $n_{2o,makro}$ fällt auf, daß sie im Bereich der Kerbgrundspannung $\hat{\sigma}_{xxa} = 669 \text{ N/mm}^2$ zunächst steil ansteigen, dann große negative Werte berechnet werden, ein erneuter Vorzeichenwechsel stattfindet und der Wert sich schließlich asymptotisch einer oberen Grenze nähert. Dieses Verhalten läßt sich an Hand der Definitionsgleichung von $n_{2o,makro}$ und der Verteilung der zweiten Invariante $\hat{I}_{2o}(t_0)$ erklären. Ausgehend von der Dauerfestigkeit ist das Produkt

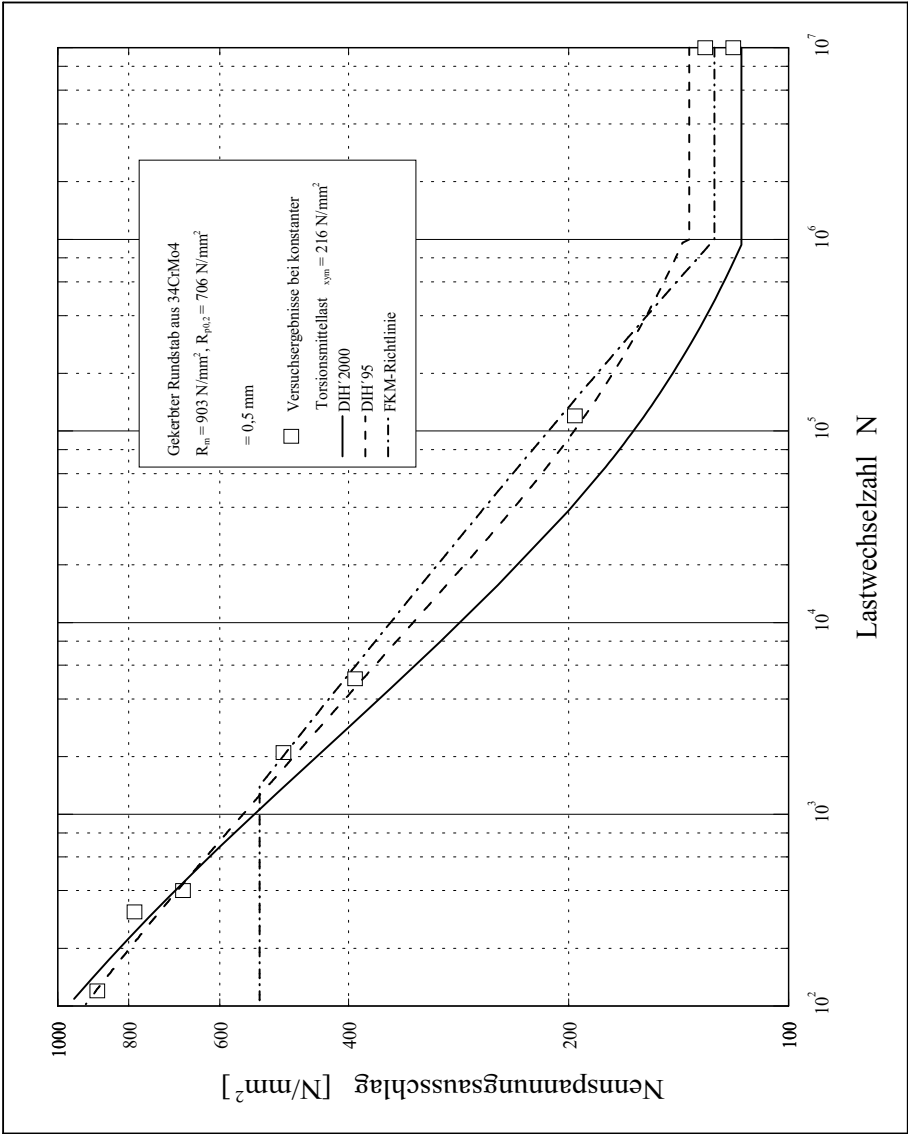


Abbildung 4.14: Vergleich von berechneten Wöhlerlinien mit Versuchsergebnissen von *Baier* [1] für einen gekerbten Rundstab unter Zugwechselbelastung mit überlagerter konstanter Torsionsmittellast

der Längs- und der Umfangsspannung $\hat{\sigma}_{xxa} \cdot \hat{\sigma}_{yya}$ zunächst kleiner als das Quadrat der Torsionsmittelspannung $\hat{\sigma}_{xym}^2$, so daß die zweite Invariante im Aus-

Tabelle 4.1: Werte des unteren Niveaus der modifizierten *Neuber*-Hyperbel $\check{\sigma}_{o,mod.Mises}$ und der Fließbehinderung φ_o für verschiedene Kerbspannungsamplituden $\hat{\sigma}_{xxa}$ bei überlagerter konstanter Torsionsmittelspannung $\hat{\sigma}_{xym}$

| $\hat{\sigma}_{xxa}^a$ | $n_{2o,makro}^b$ | $\check{\sigma}_{o,mod.Mises}$ | $\check{\sigma}_{o,Mises}$ [21] | φ_o | φ_o [21] | φ_o^c |
|------------------------|------------------|--------------------------------|---------------------------------|-------------|------------------|---------------|
| 436 | 11,88 | 246 | 265 | 1 | 1,35 | 1,11 |
| 496 | 13,55 | 255 | 274 | 1,01 | 1,4 | 1,12 |
| 564 | 17,91 | 266 | 285 | 1,03 | 1,47 | 1,13 |
| 616 | 29,96 | 274 | 294 | 1,05 | 1,51 | 1,14 |
| 662 | 443,69 | 282 | 302 | 1,06 | 1,54 | 1,14 |
| 669 | -212,06 | 284 | 304 | 1,07 | 1,55 | 1,15 |
| 752 | -5,65 | 300 | 321 | 1,1 | 1,61 | 1,16 |
| 940 | 2,78 | 338 | 360 | 1,18 | 1,7 | 1,19 |
| 1504 | 5,27 | 470 | 500 | 1,39 | 1,85 | 1,31 |
| 2631 | 5,85 | 764 | 809 | 1,64 | 1,94 | 1,51 |
| 3571 | 5,96 | 1018 | 1077 | 1,73 | 1,97 | 1,63 |

^aDie Werte in der Tabelle beginnen beim Dauerfestigkeitsniveau: $\hat{\sigma}_{xxa} = 436 \text{ N/mm}^2$, was einem Nennspannungsausschlag von 116 N/mm^2 entspricht.

^bStützziffer der zweiten Oberspannungsinvariante $\hat{I}_{2o}(t_0)$

^cMit den Gleichungen Gl.(3.103) und Gl.(3.106) abgeschätzter Wert

wertepunkt ein negatives Vorzeichen hat. Erst bei Steigerung der Amplitude wechselt die zweite Invariante ihr Vorzeichen, was den zweiten Vorzeichenwechsel bei $n_{2o,makro}$ erklärt. Für die Berechnung von $n_{2o,makro}$ wird $\hat{I}_{2o}(t_0)$ auf den über das Volumen gemittelten Wert bezogen. Dieses Integral liefert im Bereich der Dauerfestigkeit ebenfalls einen negativen Wert, so daß $n_{2o,makro}$ insgesamt positiv ist. Da die zweite Invariante aber ihr Vorzeichen auch innerhalb des Volumens wechselt, liefert die Integration für eine bestimmte Spannungs-kombination den Wert Null, was die theoretisch unendliche Sprungstelle für $n_{2o,makro}$ erklärt. Der Einfluß dieser Unstetigkeit auf das untere Niveau der modifizierten *Neuber*-Hyperbel ist sehr gering, weil das Quadrat der ersten Invariante in diesem Bereich wesentlich größer ist als die zweite Invariante. Für sehr große Amplituden dominiert die Zug-Druckbelastung, so daß $n_{2o,makro}$ schließlich dem Wert von $n_{2a,makro} = 6,07$ zustrebt.

Im Vergleich mit *Hahn* wird von der DIH'2000 ein etwas kleineres unteres Niveau vorhergesagt. Die Differenz ist nahezu konstant. Erst bei kleinen Lastwechselzahlen steigt sie an.

Ein deutlicher Unterschied zwischen den beiden Hypothesen besteht hingegen für die Fließbehinderung φ_o . Die von *Hahn* mit der Näherungsbeziehung Gl.(3.83) angenommenen hohen Werte werden durch die Ergebnisse der

FEM-Berechnung nicht bestätigt. Eine deutlich bessere Übereinstimmung für die aus Zug und Torsion zusammengesetzte Belastung wird durch die neuen Abschätzformeln erreicht. Dabei stimmt der mit Gl.(3.103) abgeschätzte Wert für die reine Zugbeanspruchung $\varphi_{Zug} = 1,90$ sehr gut mit dem FEM-Ergebnis $\varphi_{Zug,FEM} = 1,88$ überein.

Neben der wechselnden Zug-Druckbelastung untersuchte *Baier* auch das Zeitfestigkeitsverhalten bei schwellender Zugbelastung mit überlagerter konstanter Torsionsmittellast (s. **Abbildung 4.15**). Die FKM-Richtlinie überschätzt die Festigkeit für hohe Lastwechselzahlen, während die Vorhersage für niedrige N im Streubereich der Versuchsergebnisse liegt. Von der DIH'95 wird das Dauerfestigkeitsniveau überschätzt und die Steigung der Wöhlerlinie wie von der FKM-Richtlinie zu flach geschätzt. Auch von der DIH'2000 wird noch eine zu flache Steigung im Zeitfestigkeitsbereich vorhergesagt. Sie ist im Vergleich zur DIH'95 aber dichter an den Versuchsergebnissen.

Das bei der wechselnden Zug-Druckbelastung beschriebene Phänomen der unendlichen Sprungstelle bei der Berechnung von $n_{2o,makro}$ tritt für die schwellende Belastung bei der Berechnung von n_{2o} auf. In **Abbildung 4.16** ist der Verlauf der Mikrostützziffer n_{2o} in Abhängigkeit von der Kerbspannung $\hat{\sigma}_{xxa}$ dargestellt. Im Dauerfestigkeitsbereich dominiert die Torsionsmittelspannung. Die Mikrostützziffer bei „reiner“ Torsion beträgt $n_{V,2,Torsion} = 1,08$. Da die Spannungscombination bei Dauerfestigkeit fast der an der Sprungstelle entspricht, ist der Startwert von $n_{V,2o} = 2,77$ bereits deutlich größer. Für große Amplituden überwiegt dagegen der Einfluß der Zugschwellbelastung, so daß sich die Mikrostützziffer der überlagerten Belastung der der Zugbelastung $n_{V,2,Zug} = 0,96$ annähert.

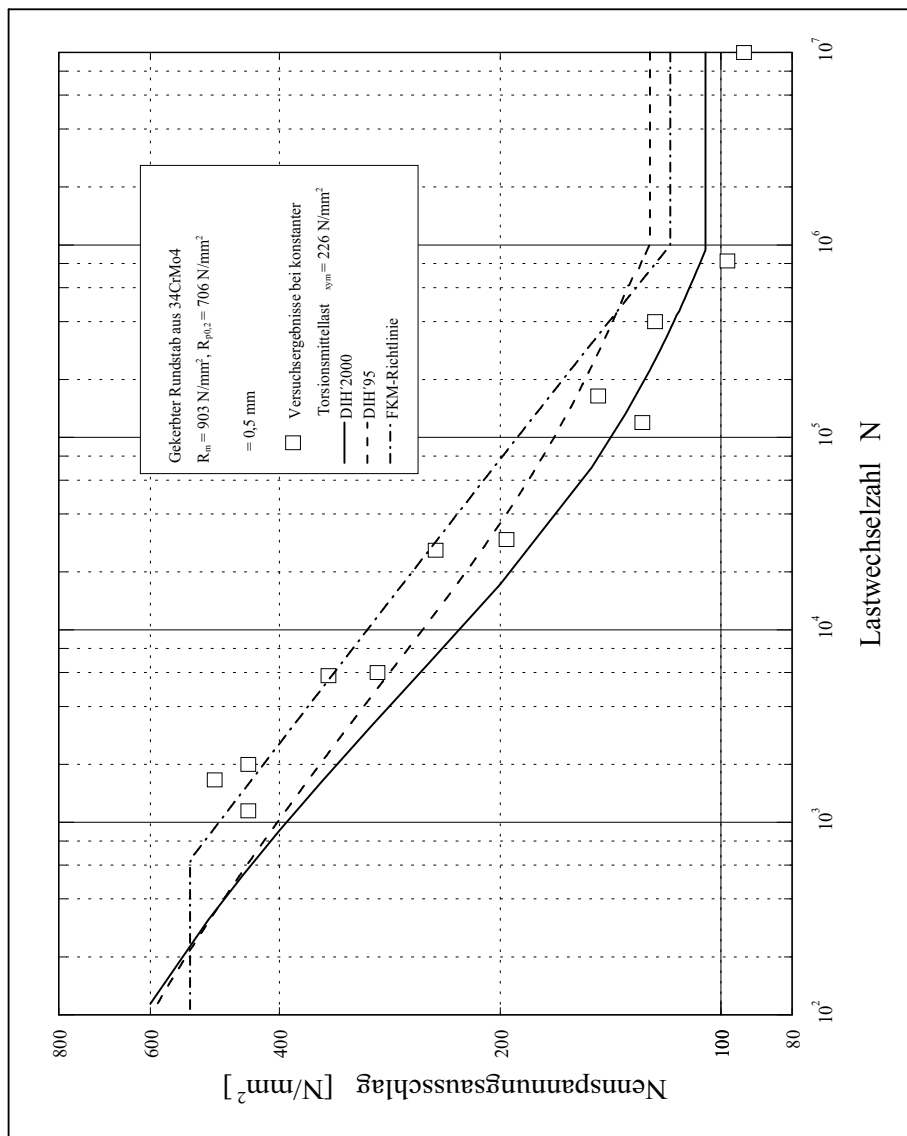


Abbildung 4.15: Vergleich von berechneten Wöhlerlinien mit Versuchsergebnissen von *Baier* [1] für einen gekerbten Rundstab unter schwelliger Zugbelastung mit überlagerter konstanter Torsionsmittellast

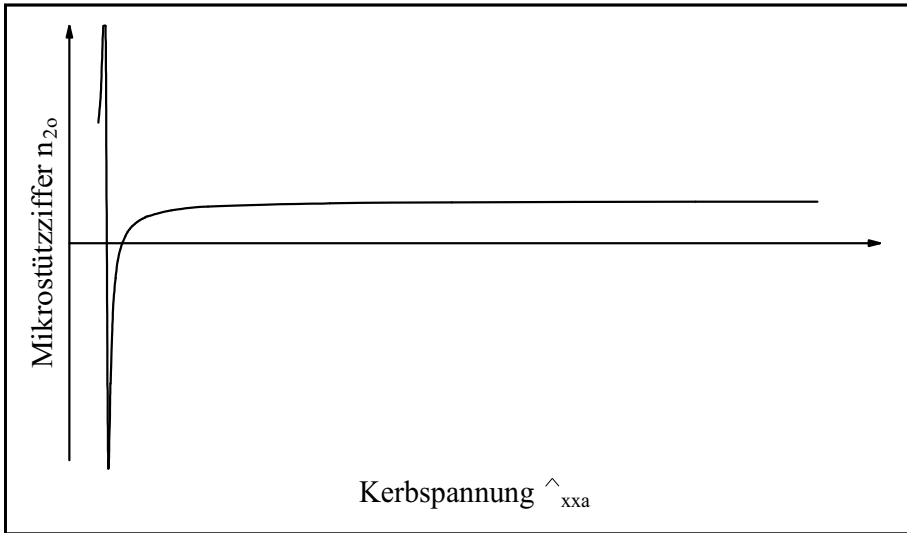


Abbildung 4.16: Berechnete Mikrostützziffern n_{20} bei unterschiedlichen Kerbspannungen $\hat{\sigma}_{xxa}$ für die Versuchsergebnisse von *Baier* [1] unter schwellender Zugbelastung mit überlagerter konstanter Torsionsmittellast

Pötter und *Zenner* [50] führten Versuche an einem Rundstab mit Umdrehungskerbe ($\rho = 2 \text{ mm}$) aus 42CrMo4 V durch. U.a. wählten sie als einstufige Belastung Biegung und Torsion, für die die Kerbformzahlen $\alpha_{kb} = 2,0$ und $\alpha_{kt} = 1,6$ angegeben werden. Die FEM-Berechnungen, deren Güte $G_{\text{Biegung}} = 1,06\%$ und $G_{\text{Torsion}} = 0,91\%$ betragen, ergeben für die Formzahlen die Werte $\alpha_{kb} = 2,02$ und $\alpha_{kt} = 1,49$.

In **Abbildung 4.17** sind die Versuchsergebnisse und die berechneten Wöhlerlinien sowohl für die Biege- als auch die Torsionsbelastung dargestellt. Von allen drei Hypothesen wird die Dauerfestigkeit bei Biegung deutlich unterschätzt, während das berechnete Zeitfestigkeitsverhalten innerhalb der Streuung der Versuchsergebnisse liegt. Die Steigung der Anrißwöhlerlinie wird von *Pötter* und *Zenner* mit $k = 5,7$ angegeben, wobei sie von einer Ecklastspielzahl $N_D \approx 2 \cdot 10^5$ ausgehen. Zum Vergleich ergeben die Berechnungen mit den drei Hypothesen: $k_{\text{FKM-Richtlinie}} = 5,0$, $k_{\text{DIH}'95} = 4,95$ und $k_{\text{DIH}'2000} = 5,05$.

Die von der DIH'95 und der DIH'2000 vorhergesagten Steigungen der Wöhlerlinien sind demnach fast gleich, obwohl die Werte der Fließbehinderung bei Biegung $\varphi_{a,\text{DIH}'95} = 1,68$ und $\varphi_{a,\text{DIH}'2000} = 1,36$ stark voneinander abweichen. Das bedeutet, daß die Wöhlerlinie der DIH'95 bei Verwendung des „wahren“

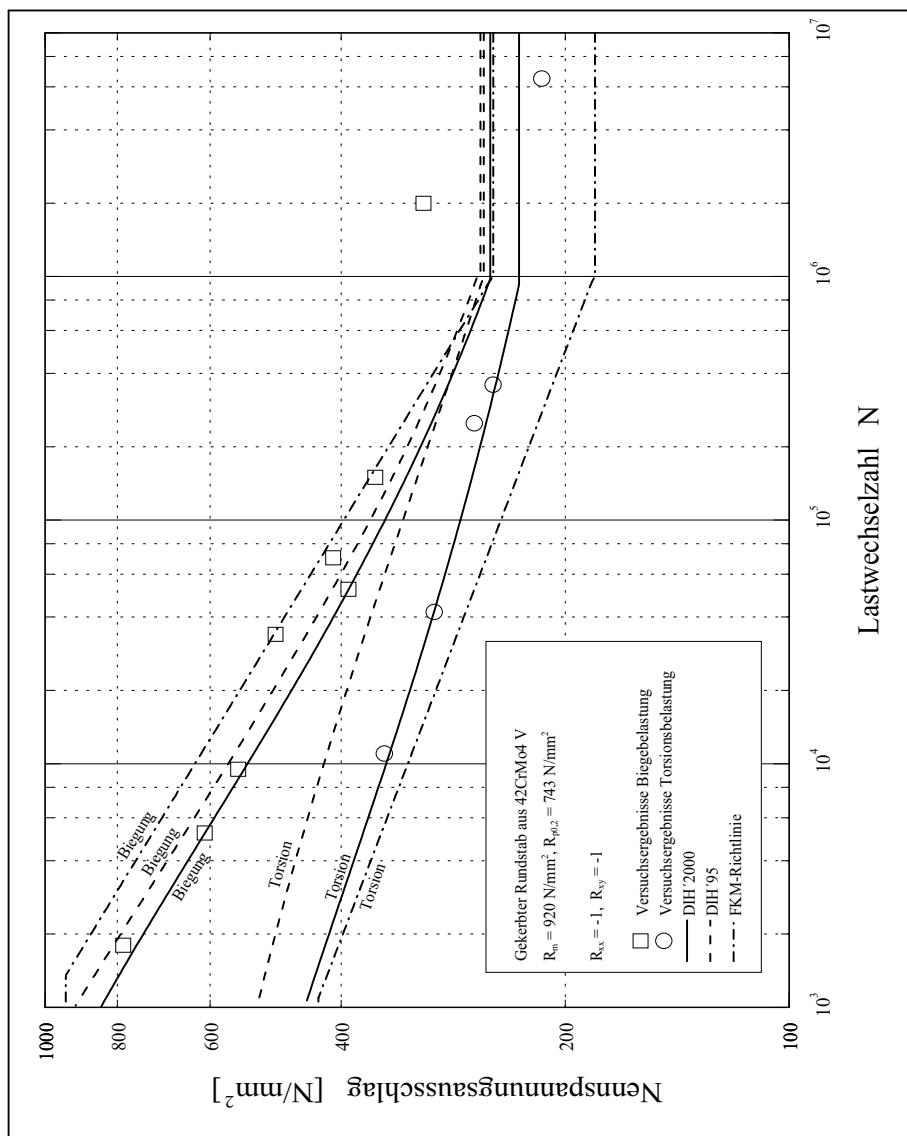


Abbildung 4.17: Vergleich von berechneten Wöhlerlinien mit Versuchsergebnissen von *Pötter* und *Zenner* [50] für einen gekerbten Rundstab unter wechselnder Biege- und Torsionsbelastung

φ_a -Wertes insgesamt flacher verläuft und damit die Festigkeit unterschätzt wird. Die Schätzgleichung von *Hahn* Gl.(2.65) liefert häufig zu große Werte,

weil die Tiefe der Kerbe nicht berücksichtigt wird. Angepaßt wurde die Gleichung (2.65) an die Versuchsergebnisse von *Dietmann* [7], dessen Stäbe sehr tief gekerbt sind ($D = 16 \text{ mm}$ und $d = 8 \text{ mm}$). Für flachere Kerben, wie beispielsweise die Stäbe von *Pötter* und *Zenner* ($D = 25 \text{ mm}$ und $d = 22 \text{ mm}$), wird die Querkontraktion nicht so stark behindert, so daß die Fließbehinderung kleiner ist.

Ein anderes Verhalten ergibt sich für die Torsionsbelastung. Hier wird die Festigkeit von der DIH'95 deutlich über- und von der FKM-Richtlinie unterschätzt. Die beste Übereinstimmung mit den Versuchsergebnisse liefert die DIH'2000.

Das Festigkeitsverhalten eines gekerbten Bauteils unter überlagerter wechselnder Biege- und Torsionsbeanspruchung mit verschiedenen Phasenverschiebungen wurde von *Simburger* [57] untersucht. Er führte seine Versuche an einem abgesetzten Rundstab ($D = 39 \text{ mm}$, $d = 25 \text{ mm}$ und $\rho = 5 \text{ mm}$) aus Ck45 durch. In [57] werden die Kerbformzahlen, die experimentell ermittelt wurden, mit $\alpha_{kb} = 1,49$ und $\alpha_{kt} = 1,24$ angegeben. Zum Vergleich liefert die FEM-Berechnung für Biegung dieselbe und für Torsion mit $\alpha_{kt} = 1,22$ eine etwas kleinere Formzahl. Die Güte der Berechnung beträgt für Biegung $G = 0,16\%$, während das Ergebnis für Torsion praktisch keine Störgrößen enthält.

Aus dem gemessenen Spannungsverlauf geht hervor, daß die Spannungsspitzen bei Biegung und Torsion am gleichen Ort auftreten, was auch für die FEM-Berechnung zutrifft. Bezüglich des Ortes unterscheidet sich die Angabe von [57] und der FEM-Berechnung. Während *Simburger* davon ausgeht, daß die höchstbeanspruchte Stelle der Kerbgrund (Übergang in den Radius) ist, wird mit der FEM-Berechnung ein Punkt ermittelt, der sich in der Nähe des Kerbrundes im Radius befindet. Die Berechnungen mit der DIH'2000 setzen auf den Spannungszustand im höchstbeanspruchten Punkt der FEM-Berechnung auf.

In **Abbildung 4.18** sind die Versuchsergebnisse ohne Phasenverschiebung und die dafür berechneten Wöhlerlinien dargestellt. Das Dauerfestigkeitsniveau wird von allen Hypothesen unterschätzt. Da der Kerbradius verhältnismäßig groß ist, ist nur eine sehr kleine Mikrostützwirkung zu erwarten. Für die DIH'95 werden mit dem Gradientenverfahren Mikrostützziffern $n_{H,1a}^2 = 1,02$ und $n_{H,2a}^2 = 1,01$ berechnet. Dagegen wird bei der Berechnung mit der DIH'2000 keine Mikrostützwirkung berücksichtigt ($n_{V,1a} = n_{V,2a} = 1$), da das Netz der FEM-Berechnung zu grob ist. Im Zeitfestigkeitsbereich wird die Steigung der Wöhlerlinie von der DIH'2000 gut vorhergesagt, während sowohl die DIH'95 als auch die FKM-Richtlinie sie überschätzen. Bei der DIH'95 kann dies mit dem wiederum zu großen Wert der Fließbehinderung $\varphi_{a,DIH'95} = 1,26$ gegenüber $\varphi_{a,DIH'2000} = 1,03$ erklärt werden. Bei Verwen-

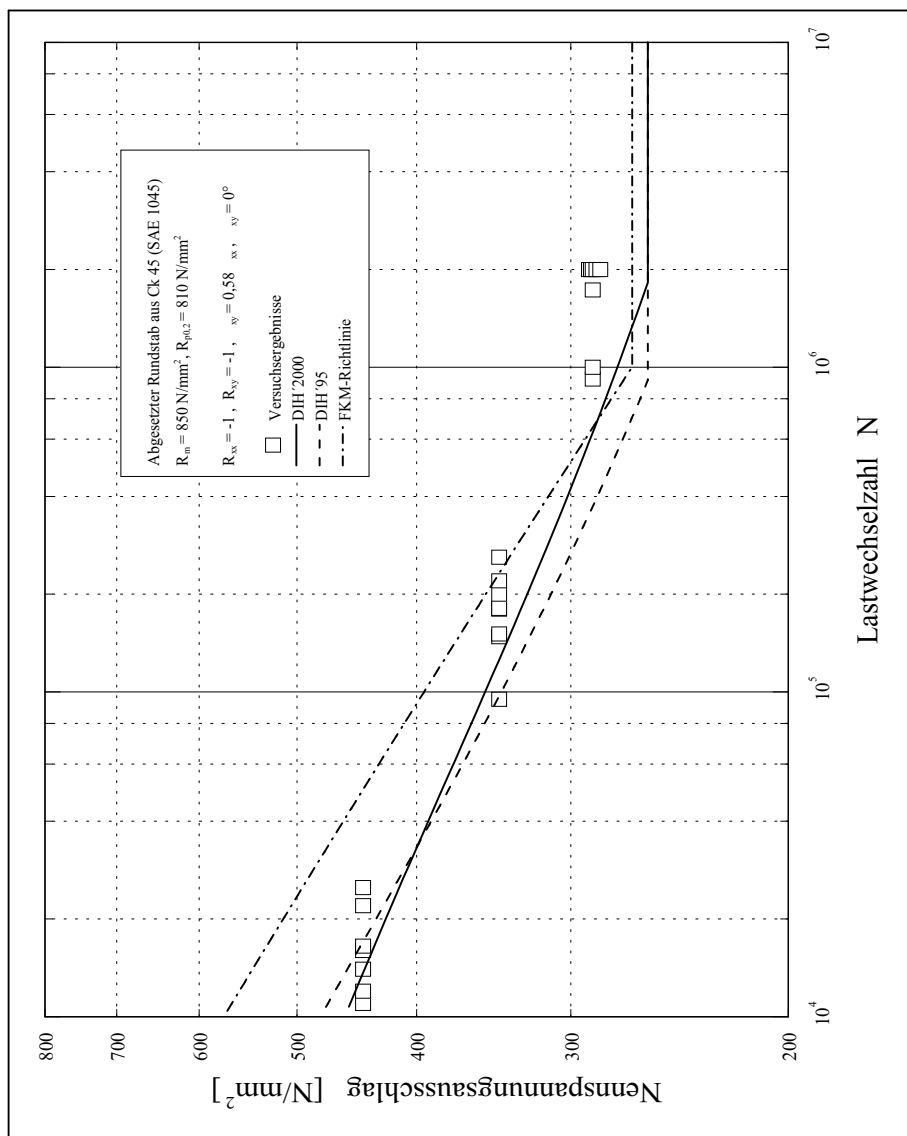


Abbildung 4.18: Vergleich von berechneten Wöhlerlinien mit Versuchsergebnissen von *Simburger* [57] für einen abgesetzten Rundstab unter überlagerter Biege- und Torsionsbelastung bei 0° Phasenverschiebung

derung der neuen Abschätzgleichungen beträgt der Wert $\varphi_a = 1,08$ und entspricht damit fast dem der FEM-Berechnung.

Die Ergebnisse für die Phasenverschiebung $\delta_{xy} = 90^\circ$ sind in **Abbildung 4.19** dargestellt. Wie für die Versuchsergebnisse von *Sonsino* [60] in **Ab-**

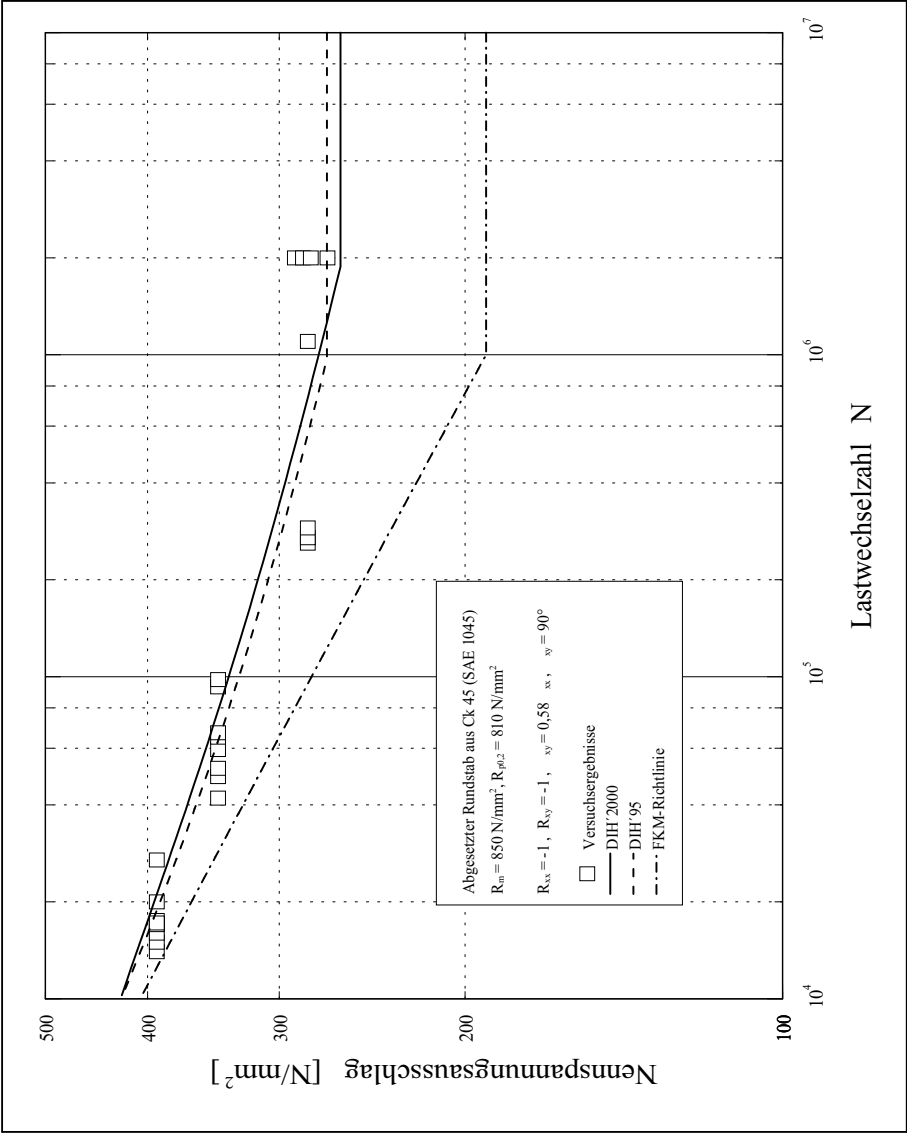


Abbildung 4.19: Vergleich von berechneten Wöhlerlinien mit Versuchsergebnissen von *Simburger* [57] für einen abgesetzten Rundstab unter überlagerter Biege- und Torsionsbelastung bei 90° Phasenverschiebung

bildung 4.9 wird das Dauerfestigkeitsniveau von der FKM-Richtlinie deutlich unterschätzt. Da die vorhergesagte Steigung größer ist als die der Versuchsergebnisse, nähert sich die Wöhlerlinie im Zeitfestigkeitsbereich den Versuchen. Dagegen wird die Dauerfestigkeit durch die DIH '95 und die DIH '2000 gut erfasst. Auch das vorhergesagte Zeitfestigkeitsverhalten stimmt mit den Versuchsergebnissen gut überein. Der Zeitpunkt, zu dem für beide Hypothesen sowohl die Mikrostützziffern als auch die Makrostützziffer berechnet werden, ist $\omega t = \pi/2$. Das ist gleichbedeutend mit einer „reinen“ Biegebelastung, da die Torsionsbelastung für diesen Zeitpunkt ihren Nulldurchgang hat.

Auch für diesen Belastungsfall wird die Fließbehinderung von der DIH '95 überschätzt ($\varphi_{a,DIH'95} = 1,42$). Der Wert aus den Ergebnissen der FEM-Berechnung $\varphi_{a,DIH'2000} = 1,22$ wie auch der abgeschätzte Wert $\varphi_a = 1,19$ sind kleiner.

In den beiden **Abbildungen 4.20** und **4.21** sind die berechneten Wöhlerlinien beider Belastungsfälle zusammengefaßt.

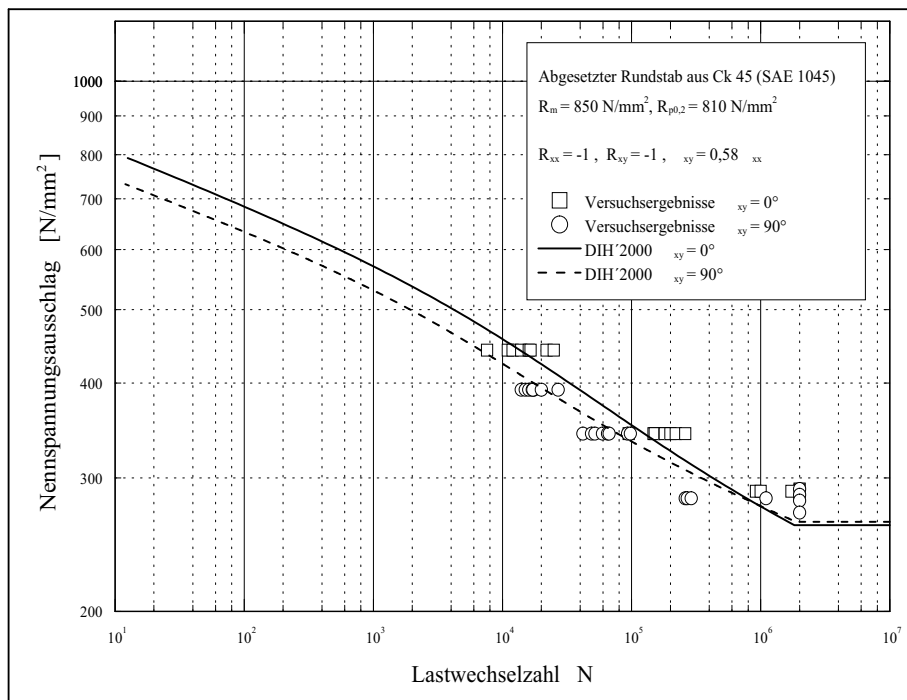


Abbildung 4.20: Vergleich der mit der DIH '2000 berechneten Wöhlerlinien bei 0° und 90° Phasenverschiebung

Während die phasenverschobenen Versuchsergebnisse bei Dauerfestigkeit ei-

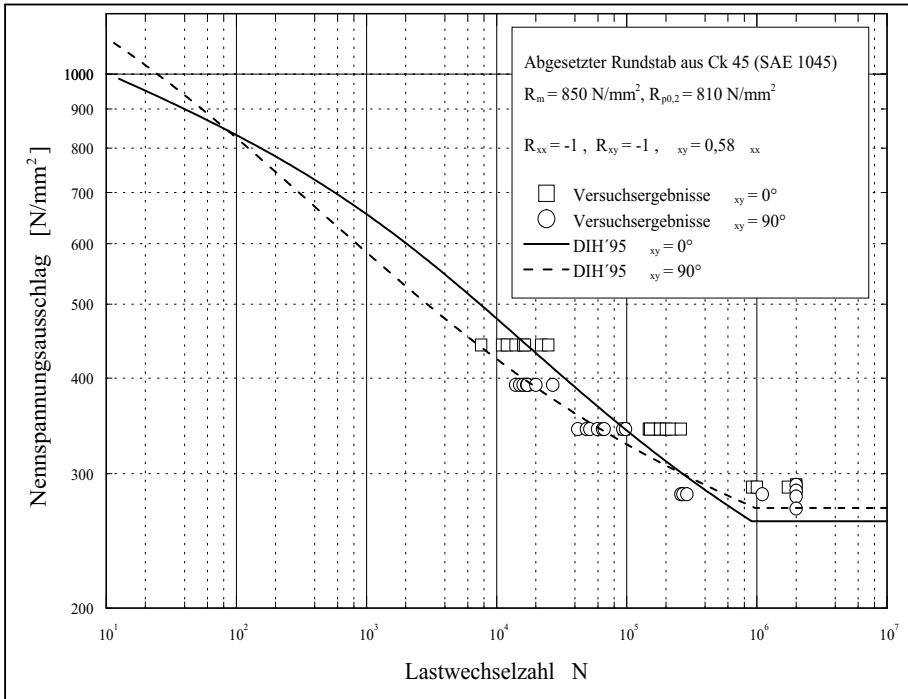


Abbildung 4.21: Vergleich der mit der DIH'95 berechneten Wöhlerlinien bei 0° und 90° Phasenverschiebung

ne geringfügige Festigkeitsminderung ergeben, wird von der DIH'95 und der DIH'2000 eine etwas größere Festigkeit vorhergesagt, wobei die Nennspannungsausschläge der DIH'2000 $S_{D,\delta_{xy}=0^\circ} = 260 \text{ N/mm}^2$ und $S_{D,\delta_{xy}=90^\circ} = 262 \text{ N/mm}^2$ sich kaum unterscheiden. Im Zeitfestigkeitsbereich wird dann die geringere Festigkeit der phasenverschobenen Belastungskombination auch vorhergesagt.

Interessant ist die unterschiedliche Vorhersage im Kurzzeitfestigkeitsbereich. Während die beiden Wöhlerlinien der DIH'2000 praktisch parallel zueinander verlaufen, schneiden sie sich nach der DIH'95 erneut bei ca. $N = 10^2$ Lastwechseln. Die dabei von der DIH'95 vorhergesagte Festigkeit ist deutlich größer als die der DIH'2000.

4.2.2 Exemplarische Nachrechnung von Versuchsergebnissen an gekerbten Bauteilen

Als erstes Beispiel wird ein weiterer Versuch von *Liebrich* [34] nachgerechnet. Zusätzlich zu der für die **Abbildungen 4.11** und **4.12** verwendeten

Kerbgeometrie führte er Versuche an einem umlaufgekerbten Rundstab mit $\rho = 0,12 \text{ mm}$ und Durchmessern des Stabes von $D = 12 \text{ mm}$ und $d = 6 \text{ mm}$ durch. Für eine schwellende Zug-Druckbelastung mit der Nennspannungsamplitude $S_a = 197 \text{ N/mm}^2$ ergab sich eine ertragbare Lastwechselzahl $N = 45000$.

Als Werkstoff wurde ebenfalls der 34CrNiMo6V mit einer Härte 445HB30 verwendet. Die Zugfestigkeit, die Dehngrenze und der Elastizitätsmodul werden mit

$$R_m = 1118 \text{ N/mm}^2, R_{p0,2} = 1001 \text{ N/mm}^2 \text{ und } E = 211000 \text{ N/mm}^2$$

angegeben. Aus den Versuchsergebnissen des glatten Stabes können die Zug-Druck-Wechselzugfestigkeit, die Schwellfestigkeit, die Steigung der Wöhlerlinie und die Ecklastspielzahl bestimmt werden:

$$\sigma_W = 530 \text{ N/mm}^2, \sigma_{schw} = 922 \text{ N/mm}^2, k = 16 \text{ und } N_D = 1 \cdot 10^6.$$

Die Torsions-Wechselzugfestigkeit wird mit Gl.(3.95) geschätzt und die Mikro- und Makrostützwirkung herausgerechnet, so daß sich ein Wert $\tau_W = 419 \text{ N/mm}^2$ ergibt. In der weiteren Berechnung werden darüber hinaus die Werte der zyklischen Dehngrenze $R'_{p0,2}$, des zyklischen Verfestigungsexponentens n' und der dauerfest ertragbaren Spannungsintensität benötigt. Sie werden mit den Gleichungen Gl.(3.100), Gl.(3.101) und Gl.(3.102) abgeschätzt und betragen:

$$R'_{p0,2} = 672 \text{ N/mm}^2, 1/n' = 8,595 \text{ und } \Delta K_{th0} = 183,5 \text{ N/mm}^{3/2}.$$

Mit Gl.(2.54) kann die charakteristische Werkstoffstrukturlänge bestimmt werden: $\rho^* = 0,025 \text{ mm}$.

Bei der Netzgenerierung des FEM-Modells werden zum einen Bauteilsymmetrien ausgenutzt und zum anderen spezielle Elemente für die Berechnung des rotationssymmetrischen Spannungszustands eingesetzt. Mit einem selbst erstellten Ausleseprogramm werden nach der Berechnung gezielt nur die Daten im Kerbbereich ermittelt, um die Datenmenge insgesamt für die weitere Bewertung zu reduzieren.

Die FEM-Berechnung liefert bei einer Nennspannungsamplitude $S_a = 197 \text{ N/mm}^2$ bezogen auf den engsten Querschnitt die Kerbspannungen:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{xxa} &= \hat{\sigma}_{xxm} = 1055 \text{ N/mm}^2 \\ \hat{\sigma}_{yya} &= \hat{\sigma}_{yy m} = 309 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich eine Kerbformzahl $\alpha_{kz} = 5,35$. Die Radialspannung an der Oberfläche, die theoretisch Null sein muß, beträgt $\hat{\sigma}_{rr} = 1,37 \cdot 10^{-3}$, so daß die Berechnung als hinreichend genau angesehen werden kann. Aus den Kerbspannungen ergeben sich die in der weiteren Berechnung benötigten Invarianten:

$$\begin{aligned} \hat{I}_{1a} &= 1364 \text{ N/mm}^2 \\ \hat{I}_{2a} &= 325995 \text{ (N/mm}^2\text{)}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{I}_{1o} &= 2728 \text{ N/mm}^2 \\ \hat{I}_{2o} &= 1303980 \text{ (N/mm}^2\text{)}^2\end{aligned}$$

Der Zeitpunkt, zu dem sowohl die Mikrostützziffern als auch die invariantenbezogenen Stützziffern des unteren Niveaus der modifizierten *Neuber*-Hyperbel bestimmt werden, kann mit den Gleichungen Gl.(3.49) bzw. Gl.(3.76) bestimmt werden und beträgt $\omega t_0 = \pi/2$. Für die räumliche Auswertung werden im betrachteten Volumen aus der in einer Schnittebene bekannten Spannungsverteilung weitere Stützstellen durch Rotation erzeugt. Mit den Gleichungen Gl.(3.61) und Gl.(3.62) werden die Mikrostützziffern $n_{V,1a}$ und $n_{V,2a}$ für den Integrationsradius ρ^* aus den FEM-Daten berechnet und gleichzeitig die Fließbehinderung φ_a bestimmt:

$$n_{V,1a} = 1,162, \quad n_{V,2a} = 0,964 \quad \text{und} \quad \varphi_a = 2,03.$$

Die Stützziffern und die Fließbehinderung der Oberspannung entsprechen den Werten der Amplitude, da nur eine äußere Last den Stab belastet. Die invariantenbezogenen Stützziffern des unteren Niveaus der modifizierten *Neuber*-Hyperbel werden ebenfalls mit Gl.(3.61) und Gl.(3.62) allerdings für den Integrationsradius $r_{max} = 3 \text{ mm}$ bestimmt:

$$n_{1a,makro} = n_{1o,makro} = 19,312 \quad \text{und} \quad n_{2a,makro} = n_{2o,makro} = 14,891.$$

Zur Berechnung der Makrostützziffern m_a und m_o werden die mikrogestützte modifizierte *von Mises*-Vergleichsspannung $\bar{\sigma}_{a,mod.Mises}$ bzw. $\bar{\sigma}_{o,mod.Mises}$ und die unteren Niveaus $\check{\sigma}_{a,mod.Mises}$ bzw. $\check{\sigma}_{o,mod.Mises}$ benötigt. Mit den entsprechenden Invarianten ergeben sich nach Gl.(3.76) und Gl.(3.79) bzw. Gl.(3.80) folgende Werte:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{a,mod.Mises} &= 1030 \text{ N/mm}^2 \\ \check{\sigma}_{a,mod.Mises} &= 248 \text{ N/mm}^2 \\ \bar{\sigma}_{o,mod.Mises} &= 2059 \text{ N/mm}^2 \\ \check{\sigma}_{o,mod.Mises} &= 495 \text{ N/mm}^2\end{aligned}$$

Die modifizierte *Neuber*-Hyperbel schneidet die mit φ_a angehobene zyklische Bauteilkurve bei einer örtlichen Spannungsamplitude $\sigma_{a,\ddot{r}tl} = 1013 \text{ N/mm}^2$, womit sich eine fiktive Spannung $\sigma_a^* = 664 \text{ N/mm}^2$ ergibt. Für die Oberspannung liefert der *Neuber*-Prozeß die Werte $\sigma_{o,\ddot{r}tl} = 1549 \text{ N/mm}^2$ und $\sigma_o^* = 805 \text{ N/mm}^2$. Damit werden die Makrostützziffern mit Gl.(3.77) und Gl.(3.78) berechnet:

$$m_a = 1,55 \quad \text{und} \quad m_o = 2,56.$$

Im nächsten Schritt wird die Vergleichsmittelspannung ermittelt. Da der Beanspruchungszustand zweiachsig ist und der Zeitpunkt der Maxima der Vergleichsoberspannung $\sigma_{o,NSH}(t)$ und der Vergleichsspannungs-Amplitude $\sigma_{a,NSH}(t)$ mit $\omega t = \pi/2$ bekannt ist, gilt:

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_{o,NSH} &= \frac{1}{m_o} \cdot \left[\frac{\hat{I}_{1o}}{\sqrt{n_{V,1o}}} + \sqrt{\frac{\hat{I}_{1o}^2}{n_{V,1o}} - 4 \cdot \frac{\hat{I}_{2o}}{n_{V,2o}}} \right] \\ &= 690 \text{ N/mm}^2\end{aligned}\quad (4.2)$$

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_{a,NSH} &= \frac{1}{m_a} \cdot \left[\frac{\hat{I}_{1a}}{\sqrt{n_{V,1a}}} + \sqrt{\frac{\hat{I}_{1a}^2}{n_{V,1a}} - 4 \cdot \frac{\hat{I}_{2a}}{n_{V,2a}}} \right] \\ &= 569 \text{ N/mm}^2\end{aligned}\quad (4.3)$$

Daraus ergibt sich mit Gl.(3.84) die Vergleichsmittelspannung $\sigma_{vm} = 121 \text{ N/mm}^2$.

Die Berechnung der ertragbaren Lastwechselzahl erfolgt entsprechend **Kapitel 3.5** durch einen iterativen Prozeß. Hierfür werden noch der Parabelparameter Q des Dauerfestigkeitsschaubilds nach *Haigh*, der zugehörige Wöhlerlinienexponent k_Q und der Wöhlerlinienexponent k_k des Wechselfestigkeits-Verhältnisses benötigt. Nach Gl.(2.6) beträgt $Q = 0,247$, nach Gl.(2.26) $k_Q = 10,36$ und nach Gl.(3.22) $k_k = 46,09$.

Als Startwert der Iteration wird für die Lastwechselzahl $N = N_D = 10^6$ vorgegeben. In der nachfolgenden **Tabelle 4.2** sind die von der Lastwechselzahl abhängigen Größen k_{aN} nach Gl.(3.20), σ_{va} nach Gl.(3.19) in N/mm^2 , Q_N nach Gl.(2.24), R nach Gl.(2.1), σ_{WN} nach Gl.(3.92) in N/mm^2 und N nach Gl.(3.93) zusammengefaßt.

Tabelle 4.2: Iterative Bestimmung der ertragbaren Lastwechselzahl N

| Schritt | k_{aN} | σ_{va} | Q_N | R | σ_{WN} | N |
|---------|----------|---------------|-------|--------|---------------|-------|
| 1 | 1,264 | 664 | 0,247 | -0,692 | 681 | 17748 |
| 2 | 1,380 | 631 | 0,364 | -0,678 | 658 | 30801 |
| 3 | 1,363 | 636 | 0,345 | -0,680 | 661 | 28455 |
| 4 | 1,366 | 635 | 0,348 | -0,680 | 661 | 28779 |
| 5 | 1,365 | 635 | 0,347 | -0,680 | 661 | 28733 |
| 6 | 1,366 | 635 | 0,347 | -0,680 | 661 | 28739 |
| 7 | 1,366 | 635 | 0,347 | -0,680 | 661 | 28738 |

Da die Änderung der Lastwechselzahl zwischen dem sechsten und siebten Schritt kleiner eins ist ($|N - N_{alt}| \leq 1$), wird die Schleife verlassen. Die berechnete Lastwechselzahl $N = 28738$ ist kleiner als das Versuchsergebnis $N = 45000$ und liegt somit auf der sicheren Seite.

Als zweites Beispiel wird ein Versuch von *Baier* [1] für eine Zugschwellbelastung mit überlagerter Torsionsmittelspannung nachgerechnet (s.a. **Abbildung 4.15**). Für eine Nennspannungsamplitude $S_a = 199 \text{ N/mm}^2$ und eine Torsionsnennmittelspannung $T_m = 226 \text{ N/mm}^2$ ermittelte *Baier* eine ertragbare Lastwechselzahl von $N = 29400$.

Aus den von *Baier* in [1] angegebenen Werten für die Zugfestigkeit $R_m = 903 \text{ N/mm}^2$ und die Dehngrenze $R_{p0,2} = 706 \text{ N/mm}^2$ wird zunächst die Wechselfestigkeit des gekerbten Stabes mit Gl.(3.94) abgeschätzt: $\sigma_W = 418 \text{ N/mm}^2$. Hieraus werden die Schwellfestigkeit mit Gl.(3.99) $\sigma_{schw} = 669 \text{ N/mm}^2$, die zyklische Dehngrenze mit Gl.(3.100) $R'_{p0,2} = 542 \text{ N/mm}^2$ und der zyklische Verfestigungsexponent mit Gl.(3.101) $1/n' = 7,868$ abgeschätzt. Die Torsions-Wechselfestigkeit wird wie im ersten Beispiel berechnet: $\tau_W = 281 \text{ N/mm}^2$. Für den Elastizitätsmodul wird $E = 211000 \text{ N/mm}^2$, für die Steigung der Wöhlerlinie $k = 15$ und für die Ecklastspielzahl $N_D = 1 \cdot 10^6$ entsprechend **Kapitel 3.6** angenommen. Mit der dauerfest ertragbaren Spannungsintensität $\Delta K_{th0} = 183,5 \text{ N/mm}^2$ ergibt sich mit Gl.(2.54) die charakteristische Werkstoffstrukturlänge $\rho^* = 0,048 \text{ mm}$.

Die FEM-Berechnung liefert folgende Kerbspannungen:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{xxa} &= \hat{\sigma}_{xxm} = 751 \text{ N/mm}^2 \\ \hat{\sigma}_{yya} &= \hat{\sigma}_{yy m} = 214 \text{ N/mm}^2 \\ \hat{\sigma}_{xym} &= 460 \text{ N/mm}^2\end{aligned}$$

Damit ergeben sich die Invarianten zu:

$$\begin{aligned}\hat{I}_{1a} &= 965 \text{ N/mm}^2 \\ \hat{I}_{2a} &= 160714 \text{ (N/mm}^2\text{)}^2 \\ \hat{I}_{1o} &= 1930 \text{ N/mm}^2 \\ \hat{I}_{2o} &= 431256 \text{ (N/mm}^2\text{)}^2\end{aligned}$$

Da die Torsionsbelastung nur statisch ist, gilt für den Zeitpunkt der Berechnung der Mikrostützziffern, der invariantenbezogenen Stützziffern des unteren Niveaus der modifizierten *Neuber*-Hyperbel, der Hauptoberspannung und der Hauptspannungsamplitude $\omega t = \pi/2$. Damit werden die Mikrostützziffern und Fließbehinderungen aus den FEM-Daten berechnet:

$$\begin{aligned}n_{V,1a} &= 1,072, n_{V,2a} = 0,965 \text{ und } \varphi_a = 1,88 \\ n_{V,1o} &= 1,072, n_{V,2o} = 0,917 \text{ und } \varphi_o = 1,39 \\ n_{1a,makro} &= 9,100 \text{ und } n_{2a,makro} = 6,074 \\ n_{1o,makro} &= 9,100 \text{ und } n_{2o,makro} = 5,178\end{aligned}$$

Damit können die für den *Neuber*-Prozeß benötigten Größen mit Gl.(3.76) und Gl.(3.79) bzw. Gl.(3.80) berechnet werden:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{a,mod.Mises} &= 708 \text{ N/mm}^2, & \check{\sigma}_{a,mod.Mises} &= 210 \text{ N/mm}^2 \\ \bar{\sigma}_{o,mod.Mises} &= 1561 \text{ N/mm}^2, & \check{\sigma}_{o,mod.Mises} &= 475 \text{ N/mm}^2\end{aligned}$$

Für die Amplitude ergibt sich eine örtliche Spannung $\sigma_{a,\text{örtl}} = 697 \text{ N/mm}^2$ und damit eine fiktive Spannung $\sigma_a^* = 499 \text{ N/mm}^2$, während der Prozeß für die Oberspannung die Werte $\sigma_{o,\text{örtl}} = 927 \text{ N/mm}^2$ und $\sigma_o^* = 676 \text{ N/mm}^2$ liefert. Mit Gl.(3.77) und Gl.(3.78) werden die Makrostützziffern $m_a = 1,42$ und $m_o = 2,31$ berechnet. Mit Gl.(4.2) und Gl.(4.3) werden die Vergleichsoberspannung $\tilde{\sigma}_{o,NSH} = 678 \text{ N/mm}^2$ und die Vergleichsspannungs-Amplitude $\tilde{\sigma}_{a,NSH} = 487 \text{ N/mm}^2$ ermittelt. Schließlich kann die Vergleichsmittelspannung mit Gl.(3.84) berechnet werden: $\sigma_{vm} = 191 \text{ N/mm}^2$.

Für den iterativen Prozeß der Bestimmung der ertragbaren Lastwechselzahl werden wie im ersten Beispiel der Parameter $Q = 0,376$ mit Gl.(2.6) und die Wöhlerlinienexponenten $k_Q = 14,28$ mit Gl.(2.26) und $k_k = 95,34$ mit Gl.(3.22) berechnet.

Startwert der Iteration ist wiederum $N = N_D = 10^6$ Lastwechsel. In **Tabelle 4.3** sind die von der Lastwechselzahl abhängigen Größen für die einzelnen Schritte der Iteration aufgeführt.

Tabelle 4.3: Iterative Bestimmung der ertragbaren Lastwechselzahl N

| Schritt | k_{aN} | σ_{va} | Q_N | R | σ_{WN} | N |
|---------|----------|---------------|-------|--------|---------------|-------|
| 1 | 1,488 | 499 | 0,376 | -0,448 | 544 | 19063 |
| 2 | 1,551 | 483 | 0,491 | -0,435 | 547 | 17653 |
| 3 | 1,552 | 482 | 0,494 | -0,434 | 547 | 17595 |
| 4 | 1,552 | 482 | 0,494 | -0,434 | 547 | 17592 |
| 5 | 1,552 | 482 | 0,494 | -0,434 | 547 | 17592 |

Erneut liegt das Ergebnis der Berechnung $N = 17592$ gegenüber dem Versuch $N = 29400$ auf der sicheren Seite. Die gesamte Wöhlerlinie ist in **Abbildung 4.15** dargestellt.

5 Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wird ein neuartiges Konzept zur Lebensdauervorhersage für mehrachsige, periodisch schwingbeanspruchte metallische Bauteile auf der Grundlage linear elastischer FEM-Berechnungen vorgestellt. Für diese periodisch schwingenden Beanspruchungen sind Lebensdauervorhersagen für den ganzen Lastwechselzahlbereich möglich, der sich von der Dauerfestigkeit bis zur Kurzzeitfestigkeit erstreckt.

Durch die Erweiterung der drei Invarianten der DIH vom zwei- zum dreiachsigen Beanspruchungszustand ist es möglich, die Lebensdauer auch an nicht lastfreien Oberflächen genauer als bisher vorherzusagen. Außerdem bildet diese Neuerung einen Einstieg in das große Gebiet der Lebensdauerbewertung randschichtverfestigter Bauteile, deren Versagensort größtenteils unterhalb der Oberfläche liegt, wo i.a. ein dreiachsiger Spannungszustand herrscht.

Bei mehrachsigen, mit unterschiedlichen Frequenzen schwingenden Beanspruchungen wird die maßgebliche Vergleichsspannungs-Amplitude aus der Vergleichsspannungs-Zeitfunktion berechnet. Die Amplituden unterschiedlicher Frequenzen werden unabhängig voneinander gebildet. Die Kopplung der einzelnen Frequenzen zur Gesamtanstrengung erfolgt über die Phasenlagen. Zur invarianten Bestimmung dieser Phasenlagen wird ein ganz neuer Lösungsweg vorgestellt.

Für inhomogene Beanspruchungen –beispielsweise durch Kerben– ist es gelungen, die Lebensdauervorhersage allein auf der Basis der Kerbspannungen einer linear elastischen FEM-Berechnung durchzuführen. Das Konzept der Lebensdauervorhersage ist unabhängig von Nennspannungen und Kerbgeometriefaktoren –beispielsweise der Kerbformzahl α_k – formuliert. Um diese Unabhängigkeit zu erreichen, wird ein neues Volumenkonzept vorgeschlagen. Mit Hilfe dieses Konzeptes wird bei der Berechnung der Mikrostützziffern nicht nur eine Raumrichtung wie bei dem klassischen Gradientenkonzept berücksichtigt, sondern es fließen im Sinne der „Nachbarschaft“ alle Spannungszustände innerhalb eines Teilvolumens in die Berechnung ein. Für die Berechnung der Makrostützwirkungen wird das untere Niveau der modifizierten *Neuber*-Hyperbel ebenfalls durch ein Volumenkonzept bestimmt. Dabei wird außerdem eine neue Vorgehensweise zur Ermittlung der maßgeblichen Fließbehinderung aus den Ergebnissen der FEM-Berechnung vorgestellt, die unabhängig von der Belastungsart formuliert ist.

Im Gesamtkonzept wird die in der Konstruktion übliche Vorgehensweise der Lebensdauerberechnung auf der Basis von Spannungen und lastspielzahlabhängi-

gen *Haigh*-Schaubildern konsequent beibehalten. Das bedeutet, daß der örtliche Beanspruchungszustand grundsätzlich auf eine rein wechselnde, äquivalente Belastung des glatten Stabes zurückgerechnet wird.

Eine gute Übereinstimmung von Rechnung und Versuch zeigt die Nachrechnung der Dauerfestigkeitsergebnisse glatter Bauteile unter mehrfrequenter Belastung. Dies gilt auch für die Nachrechnung der Wöhlerlinien gekerbter Bauteile. Hierbei fällt besonders auf, daß mit dem vorgestellten Konzept die bauteil- und belastungsabhängigen Steigungen der Wöhlerlinien sehr gut vorhergesagt werden.

Zur weiteren Absicherung der neuen nennspannungsunabhängigen Lebensdauervorhersage auf der Grundlage von

- Kerbspannungen linear elastischer FEM-Berechnungen,
- Stützwirkungen (Mikro- und Makrostützwirkung),
- *Haigh*-Schaubildern sowie
- Werkstoff-Wöhlerlinien

sind weitere verfügbare Versuchsergebnisse in die Auswertung einzubeziehen. Dazu ist es erforderlich, die Kerbformzahlen und Mikrostützziffern der jeweils verwendeten Versuchsproben mit hochgenauen FEM-Berechnungen zu überprüfen. Diese Berechnungen sollen die Grundlage für neue vereinfachte Berechnungen

- für praxisrelevante Kerbgeometrien,
- einfache und zusammengesetzte Belastungen und
- häufig eingesetzte Werkstoffe

liefern und die Vorhersage der Lebensdauer langfristig auf eine qualitativ verbesserte Stufe stellen.

Dies bedeutet für den Bereich der Mikro- und Makrostützwirkung, die gewählten Integrationsradien durch Einbeziehen weiterer Versuchsergebnisse zu verifizieren bzw. anzupassen. Gleichzeitig sollten für praxisrelevante Kerbgeometrien und Belastungen geeignete Näherungsfunktionen der Spannungsverteilungen aufgestellt werden, um den Aufwand zur Erstellung und Berechnung sehr feiner FEM-Netze zu verringern. Eine Vereinfachung der Berechnung der Fließbehinderung φ ist anzustreben.

Langfristig sollte ein optimierter Berechnungsgang zur Verkürzung der Berechnungszeiten in handelsüblichen FEM-Programmen eingebettet werden. Dabei

wäre es wünschenswert, daß als Ergebnisse nicht Spannungen sondern Lebensdauern ermittelt werden.

Die bisher mit dem neuen Konzept erzielten Ergebnisse ermutigen dazu, mit dem erarbeiteten Wissen eine neue Betriebsfestigkeitsberechnung zu entwerfen. Außerdem sollte es auch bei der Bewertung randschichtverfestigter Bauteile genutzt werden.

A Ergänzungen zur Drei-Invarianten-Hypothese

A.1 Invarianten

$$\begin{aligned}
 J_{1a} = & \sigma_{xxa}^2 + 2 \cdot \sigma_{xxa} \cdot \sigma_{yya} \cdot \cos(\delta_{xx} - \delta_{yy}) + \\
 & \sigma_{yya}^2 + 2 \cdot \sigma_{xxa} \cdot \sigma_{zza} \cdot \cos(\delta_{xx} - \delta_{zz}) + \\
 & \sigma_{zza}^2 + 2 \cdot \sigma_{yya} \cdot \sigma_{zza} \cdot \cos(\delta_{yy} - \delta_{zz})
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

$$\begin{aligned}
 J_{2a} = & \sigma_{xxa} \cdot \sigma_{yya} \cdot \cos(\delta_{xx} - \delta_{yy}) + \\
 & \sigma_{xxa} \cdot \sigma_{zza} \cdot \cos(\delta_{xx} - \delta_{zz}) + \\
 & \sigma_{yya} \cdot \sigma_{zza} \cdot \cos(\delta_{yy} - \delta_{zz}) - \\
 & \sigma_{xya}^2 - \sigma_{xza}^2 - \sigma_{yza}^2
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

$$\begin{aligned}
 J_{12a}^2 = & \sigma_{xya}^2 \cdot \left\{ [\sigma_{xxa} \cdot \sin(\delta_{xx} - \delta_{xy}) - \sigma_{yya} \cdot \sin(\delta_{yy} - \delta_{xy})]^2 + \right. \\
 & [\sigma_{xxa} \cdot \sin(\delta_{xx} - \delta_{xy}) - \sigma_{zza} \cdot \sin(\delta_{zz} - \delta_{xy})]^2 + \\
 & [\sigma_{yya} \cdot \sin(\delta_{yy} - \delta_{xy}) - \sigma_{zza} \cdot \sin(\delta_{zz} - \delta_{xy})]^2 - \\
 & [\sigma_{xxa}^2 \cdot \sin^2(\delta_{xx} - \delta_{xy}) + \sigma_{yya}^2 \cdot \sin^2(\delta_{yy} - \delta_{xy}) + \\
 & \left. \sigma_{zza}^2 \cdot \sin^2(\delta_{zz} - \delta_{xy}) \right\} + \\
 & \sigma_{xza}^2 \cdot \left\{ [\sigma_{xxa} \cdot \sin(\delta_{xx} - \delta_{xz}) - \sigma_{yya} \cdot \sin(\delta_{yy} - \delta_{xz})]^2 + \right. \\
 & [\sigma_{xxa} \cdot \sin(\delta_{xx} - \delta_{xz}) - \sigma_{zza} \cdot \sin(\delta_{zz} - \delta_{xz})]^2 + \\
 & [\sigma_{yya} \cdot \sin(\delta_{yy} - \delta_{xz}) - \sigma_{zza} \cdot \sin(\delta_{zz} - \delta_{xz})]^2 - \\
 & [\sigma_{xxa}^2 \cdot \sin^2(\delta_{xx} - \delta_{xz}) + \sigma_{yya}^2 \cdot \sin^2(\delta_{yy} - \delta_{xz}) + \\
 & \left. \sigma_{zza}^2 \cdot \sin^2(\delta_{zz} - \delta_{xz}) \right\} +
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

$$\begin{aligned}
 & \sigma_{yza}^2 \cdot \left\{ [\sigma_{xxa} \cdot \sin(\delta_{xx} - \delta_{yz}) - \sigma_{yya} \cdot \sin(\delta_{yy} - \delta_{yz})]^2 + \right. \\
 & [\sigma_{xxa} \cdot \sin(\delta_{xx} - \delta_{yz}) - \sigma_{zza} \cdot \sin(\delta_{zz} - \delta_{yz})]^2 + \\
 & [\sigma_{yya} \cdot \sin(\delta_{yy} - \delta_{yz}) - \sigma_{zza} \cdot \sin(\delta_{zz} - \delta_{yz})]^2 - \\
 & [\sigma_{xxa}^2 \cdot \sin^2(\delta_{xx} - \delta_{yz}) + \sigma_{yya}^2 \cdot \sin^2(\delta_{yy} - \delta_{yz}) + \\
 & \left. \sigma_{zza}^2 \cdot \sin^2(\delta_{zz} - \delta_{yz}) \right\} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 4 \cdot [\sigma_{xya}^2 \cdot \sigma_{xza}^2 \cdot \sin^2(\delta_{xy} - \delta_{xz}) + \\
& \quad \sigma_{xya}^2 \cdot \sigma_{yza}^2 \cdot \sin^2(\delta_{xy} - \delta_{yz}) + \\
& \quad \sigma_{xza}^2 \cdot \sigma_{yza}^2 \cdot \sin^2(\delta_{xz} - \delta_{yz})] - \\
& [\sigma_{xxa}^2 \cdot \sigma_{yya} \cdot \sigma_{zza} \cdot \sin(\delta_{xx} - \delta_{yy}) \cdot \sin(\delta_{xx} - \delta_{zz}) - \\
& \quad \sigma_{xxa} \cdot \sigma_{yya}^2 \cdot \sigma_{zza} \cdot \sin(\delta_{xx} - \delta_{yy}) \cdot \sin(\delta_{yy} - \delta_{zz}) + \\
& \quad \sigma_{xxa} \cdot \sigma_{yya} \cdot \sigma_{zza}^2 \cdot \sin(\delta_{xx} - \delta_{zz}) \cdot \sin(\delta_{yy} - \delta_{zz})]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{4a} = & \sigma_{xya}^4 + \sigma_{xza}^4 + \sigma_{xxa}^2 \cdot \sigma_{yya}^2 + \sigma_{yza}^4 + \sigma_{xxa}^2 \cdot \sigma_{zza}^2 + \sigma_{yya}^2 \cdot \sigma_{zza}^2 + \\
& 2 \cdot \sigma_{xya}^2 \cdot \sigma_{xza}^2 \cdot \cos[2 \cdot (\delta_{xy} - \delta_{xz})] + \\
& 2 \cdot \sigma_{xxa} \cdot \sigma_{yya} \cdot \sigma_{zza}^2 \cdot \cos(\delta_{xx} - \delta_{yy}) - \\
& 2 \cdot \sigma_{xxa} \cdot \sigma_{xya}^2 \cdot \sigma_{yya} \cdot \cos(\delta_{xx} - 2 \cdot \delta_{xy} + \delta_{yy}) - \\
& 2 \cdot \sigma_{xxa} \cdot \sigma_{xza}^2 \cdot \sigma_{yya} \cdot \cos(\delta_{xx} - 2 \cdot \delta_{xz} + \delta_{yz}) - \\
& 2 \cdot \sigma_{xxa} \cdot \sigma_{yya} \cdot \sigma_{yza}^2 \cdot \cos(\delta_{xx} + \delta_{yy} - 2 \cdot \delta_{yz}) + \\
& 2 \cdot \sigma_{xya}^2 \cdot \sigma_{yza}^2 \cdot \cos[2 \cdot (\delta_{xy} - \delta_{yz})] + \\
& 2 \cdot \sigma_{xza}^2 \cdot \sigma_{yza}^2 \cdot \cos[2 \cdot (\delta_{xz} - \delta_{yz})] + \\
& 2 \cdot \sigma_{xxa} \cdot \sigma_{yya}^2 \cdot \sigma_{zza} \cdot \cos(\delta_{xx} - \delta_{zz}) - \\
& 2 \cdot \sigma_{xya}^2 \cdot \sigma_{yya} \cdot \sigma_{zza} \cdot \cos(2 \cdot \delta_{xy} - \delta_{yy} - \delta_{zz}) - \\
& 2 \cdot \sigma_{xza}^2 \cdot \sigma_{yya} \cdot \sigma_{zza} \cdot \cos(2 \cdot \delta_{xz} - \delta_{yy} - \delta_{zz}) + \\
& 2 \cdot \sigma_{xxa}^2 \cdot \sigma_{yya} \cdot \sigma_{zza} \cdot \cos(\delta_{yy} - \delta_{zz}) - \\
& 2 \cdot \sigma_{xxa} \cdot \sigma_{xya}^2 \cdot \sigma_{zza} \cdot \cos(\delta_{xx} - 2 \cdot \delta_{xy} + \delta_{zz}) - \\
& 2 \cdot \sigma_{xxa} \cdot \sigma_{xza}^2 \cdot \sigma_{zza} \cdot \cos(\delta_{xx} - 2 \cdot \delta_{xz} + \delta_{zz}) - \\
& 2 \cdot \sigma_{xxa} \cdot \sigma_{yza}^2 \cdot \sigma_{zza} \cdot \cos(\delta_{xx} - 2 \cdot \delta_{yz} + \delta_{zz}) - \\
& 2 \cdot \sigma_{yya} \cdot \sigma_{yza}^2 \cdot \sigma_{zza} \cdot \cos(\delta_{yy} - 2 \cdot \delta_{yz} + \delta_{zz})
\end{aligned} \tag{A.4}$$

$$\begin{aligned}
J_{5a} = & \sigma_{xxa}^2 \cdot \left\{ \sigma_{xxa} \cdot [\sigma_{yya} \cdot \cos(\delta_{xx} - \delta_{yy}) + \sigma_{zza} \cdot \cos(\delta_{xx} - \delta_{zz})] + \right. \\
& 2 \cdot \sigma_{yya}^2 + \sigma_{yya} \cdot \sigma_{zza} \cdot [\cos(2 \cdot \delta_{xx} - \delta_{yy} - \delta_{zz}) + \\
& \left. 4 \cdot \cos(\delta_{yy} - \delta_{zz})] \right\} + \\
& \sigma_{yya}^2 \cdot \left\{ \sigma_{yya} \cdot [\sigma_{xxa} \cdot \cos(\delta_{xx} - \delta_{yy}) + \sigma_{zza} \cdot \cos(\delta_{yy} - \delta_{zz})] + \right. \\
& 2 \cdot \sigma_{zza}^2 + \sigma_{xxa} \cdot \sigma_{zza} \cdot [\cos(2 \cdot \delta_{yy} - \delta_{xx} - \delta_{zz}) + \\
& \left. 4 \cdot \cos(\delta_{xx} - \delta_{zz})] \right\} + \\
& \sigma_{zza}^2 \cdot \left\{ \sigma_{zza} \cdot [\sigma_{xxa} \cdot \cos(\delta_{xx} - \delta_{zz}) + \sigma_{yya} \cdot \cos(\delta_{yy} - \delta_{zz})] + \right. \\
& 2 \cdot \sigma_{xxa}^2 + \sigma_{xxa} \cdot \sigma_{yya} \cdot [\cos(2 \cdot \delta_{zz} - \delta_{xx} - \delta_{yy}) + \\
& \left. 4 \cdot \cos(\delta_{xx} - \delta_{yy})] \right\} - \\
& \sigma_{xya}^2 \cdot \left\{ \sigma_{xxa}^2 \cdot \cos[2 \cdot (\delta_{xx} - \delta_{xy})] + \right. \\
& \sigma_{yya}^2 \cdot \cos[2 \cdot (\delta_{yy} - \delta_{xy})] + \sigma_{zza}^2 \cdot \cos[2 \cdot (\delta_{zz} - \delta_{xy})] + \quad (A.5) \\
& 2 \cdot \sigma_{xxa} \cdot \sigma_{yya} \cdot \cos(\delta_{xx} + \delta_{yy} - 2 \cdot \delta_{xy}) + \\
& 2 \cdot \sigma_{xxa} \cdot \sigma_{zza} \cdot \cos(\delta_{xx} + \delta_{zz} - 2 \cdot \delta_{xy}) + \\
& \left. \sigma_{yya} \cdot \sigma_{zza} \cdot \cos(\delta_{yy} + \delta_{zz} - 2 \cdot \delta_{xy}) \right\} - \\
& \sigma_{xza}^2 \cdot \left\{ \sigma_{xxa}^2 \cdot \cos[2 \cdot (\delta_{xx} - \delta_{xz})] + \right. \\
& \sigma_{yya}^2 \cdot \cos[2 \cdot (\delta_{yy} - \delta_{xz})] + \sigma_{zza}^2 \cdot \cos[2 \cdot (\delta_{zz} - \delta_{xz})] + \\
& 2 \cdot \sigma_{xxa} \cdot \sigma_{yya} \cdot \cos(\delta_{xx} + \delta_{yy} - 2 \cdot \delta_{xz}) + \\
& 2 \cdot \sigma_{xxa} \cdot \sigma_{zza} \cdot \cos(\delta_{xx} + \delta_{zz} - 2 \cdot \delta_{xz}) + \\
& \left. \sigma_{yya} \cdot \sigma_{zza} \cdot \cos(\delta_{yy} + \delta_{zz} - 2 \cdot \delta_{xz}) \right\} - \\
& \sigma_{yza}^2 \cdot \left\{ \sigma_{xxa}^2 \cdot \cos[2 \cdot (\delta_{xx} - \delta_{yz})] + \right. \\
& \sigma_{yya}^2 \cdot \cos[2 \cdot (\delta_{yy} - \delta_{yz})] + \sigma_{zza}^2 \cdot \cos[2 \cdot (\delta_{zz} - \delta_{yz})] + \\
& 2 \cdot \sigma_{xxa} \cdot \sigma_{yya} \cdot \cos(\delta_{xx} + \delta_{yy} - 2 \cdot \delta_{yz}) + \\
& 2 \cdot \sigma_{xxa} \cdot \sigma_{zza} \cdot \cos(\delta_{xx} + \delta_{zz} - 2 \cdot \delta_{yz}) + \\
& \left. \sigma_{yya} \cdot \sigma_{zza} \cdot \cos(\delta_{yy} + \delta_{zz} - 2 \cdot \delta_{yz}) \right\}
\end{aligned}$$

A.2 Abstandsfunktion für synchrone mehrfrequente Beanspruchungen

Für synchrone mehrfrequente Beanspruchungen lassen sich alle wechselnden Anteile der Spannungskomponenten $\sigma_{ija}(t)$ vereinfacht durch eine Amplitude $\hat{\sigma}_{ija}$ multipliziert mit jeweils derselben Zeitfunktion $f(t)$

$$\sigma_{ija}(t) = \hat{\sigma}_{ija} \cdot f(t) \quad (\text{A.6})$$

darstellen. Werden die Spannungskomponenten nach Gl.(A.6) in die Phasenfunktionen Gl.(3.38 und 3.39) eingesetzt, gilt:

$$\begin{aligned} \Phi(t, \Delta) &= \bar{\Phi} \cdot f(t) \\ \Phi(t, t_0) &= \tilde{\Phi} \cdot f(t) \cdot f(t_0) \\ \Phi(\Delta, \Delta) &= \hat{\Phi} \\ \Phi(t_0, t_0) &= \check{\Phi} \cdot f^2(t_0) \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Damit läßt sich die Abstandsfunktion Gl.(3.40) geschlossen integrieren und mit den Abkürzungen Gl.(3.42) gilt:

$$\begin{aligned} &\left| \frac{\tilde{\Phi}^2}{\check{\Phi}} - \frac{\bar{\Phi}^2}{\hat{\Phi}} \right| = 0 \quad , \\ 0 &= \left| (\hat{\sigma}_{xxa} + \hat{\sigma}_{yya} + \hat{\sigma}_{zza})^2 \cdot \right. \\ &\quad \left\{ \frac{\hat{\sigma}_{xxa}^2}{\check{\Phi}} - \Delta\alpha_{xx}^2 + \frac{\hat{\sigma}_{yya}^2}{\check{\Phi}} - \Delta\alpha_{yy}^2 + \frac{\hat{\sigma}_{zza}^2}{\check{\Phi}} - \Delta\alpha_{zz}^2 + \right. \\ &\quad 2 \cdot \left(\frac{\hat{\sigma}_{xxa} \cdot \hat{\sigma}_{yya}}{\check{\Phi}} - \Delta\alpha_{xx} \cdot \Delta\alpha_{yy} \right) + \\ &\quad 2 \cdot \left(\frac{\hat{\sigma}_{xxa} \cdot \hat{\sigma}_{zza}}{\check{\Phi}} - \Delta\alpha_{xx} \cdot \Delta\alpha_{zz} \right) + \\ &\quad \left. \left. 2 \cdot \left(\frac{\hat{\sigma}_{yya} \cdot \hat{\sigma}_{zza}}{\check{\Phi}} - \Delta\alpha_{yy} \cdot \Delta\alpha_{zz} \right) \right\} + \right. \\ &\quad \left. \frac{k_a^4}{4} \cdot \left\{ \hat{\sigma}_{xxa}^2 \cdot \left[\frac{\hat{\sigma}_{yya}^2}{\check{\Phi}} - \Delta\alpha_{yy}^2 + \frac{\hat{\sigma}_{zza}^2}{\check{\Phi}} - \Delta\alpha_{zz}^2 + \right. \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2 \cdot \left(\frac{\hat{\sigma}_{yya} \cdot \hat{\sigma}_{zza}}{\check{\Phi}} - \Delta\alpha_{yy} \cdot \Delta\alpha_{zz} \right) \Bigg] + \\
& \hat{\sigma}_{yya}^2 \cdot \left[\frac{\hat{\sigma}_{xxa}^2}{\check{\Phi}} - \Delta\alpha_{xx}^2 + \frac{\hat{\sigma}_{zza}^2}{\check{\Phi}} - \Delta\alpha_{zz}^2 + \right. \\
& \quad \left. 2 \cdot \left(\frac{\hat{\sigma}_{xxa} \cdot \hat{\sigma}_{zza}}{\check{\Phi}} - \Delta\alpha_{xx} \cdot \Delta\alpha_{zz} \right) \right] + \\
& \hat{\sigma}_{zza}^2 \cdot \left[\frac{\hat{\sigma}_{xxa}^2}{\check{\Phi}} - \Delta\alpha_{xx}^2 + \frac{\hat{\sigma}_{yya}^2}{\check{\Phi}} - \Delta\alpha_{yy}^2 + \right. \\
& \quad \left. 2 \cdot \left(\frac{\hat{\sigma}_{xxa} \cdot \hat{\sigma}_{yya}}{\check{\Phi}} - \Delta\alpha_{xx} \cdot \Delta\alpha_{yy} \right) \right] + \\
& 4 \cdot \left[\hat{\sigma}_{xya}^2 \cdot \left(\frac{\hat{\sigma}_{xya}^2}{\check{\Phi}} - \Delta\alpha_{xy}^2 \right) + \hat{\sigma}_{xza}^2 \cdot \left(\frac{\hat{\sigma}_{xza}^2}{\check{\Phi}} - \Delta\alpha_{xz}^2 \right) + \right. \\
& \quad \left. \hat{\sigma}_{yza}^2 \cdot \left(\frac{\hat{\sigma}_{yza}^2}{\check{\Phi}} - \Delta\alpha_{yz}^2 \right) \right] + \\
& 2 \cdot \left[\hat{\sigma}_{xxa} \cdot \hat{\sigma}_{yya} \cdot \left(\frac{\hat{\sigma}_{xxa} \cdot \hat{\sigma}_{yya}}{\check{\Phi}} - \Delta\alpha_{xx} \cdot \Delta\alpha_{yy} + \right. \right. \\
& \quad \frac{\hat{\sigma}_{xxa} \cdot \hat{\sigma}_{zza}}{\check{\Phi}} - \Delta\alpha_{xx} \cdot \Delta\alpha_{zz} + \\
& \quad \frac{\hat{\sigma}_{yya} \cdot \hat{\sigma}_{zza}}{\check{\Phi}} - \Delta\alpha_{yy} \cdot \Delta\alpha_{zz} + \\
& \quad \left. \left. \frac{\hat{\sigma}_{zza}^2}{\check{\Phi}} - \Delta\alpha_{zz}^2 \right) + \right. \\
& \hat{\sigma}_{xxa} \cdot \hat{\sigma}_{zza} \cdot \left(\frac{\hat{\sigma}_{xxa} \cdot \hat{\sigma}_{yya}}{\check{\Phi}} - \Delta\alpha_{xx} \cdot \Delta\alpha_{yy} + \right. \\
& \quad \frac{\hat{\sigma}_{xxa} \cdot \hat{\sigma}_{zza}}{\check{\Phi}} - \Delta\alpha_{xx} \cdot \Delta\alpha_{zz} + \\
& \quad \frac{\hat{\sigma}_{yya} \cdot \hat{\sigma}_{zza}}{\check{\Phi}} - \Delta\alpha_{yy} \cdot \Delta\alpha_{zz} + \\
& \quad \left. \left. \frac{\hat{\sigma}_{yya}^2}{\check{\Phi}} - \Delta\alpha_{yy}^2 \right) + \right. \\
& \hat{\sigma}_{yya} \cdot \hat{\sigma}_{zza} \cdot \left(\frac{\hat{\sigma}_{xxa} \cdot \hat{\sigma}_{yya}}{\check{\Phi}} - \Delta\alpha_{xx} \cdot \Delta\alpha_{yy} + \right. \\
& \quad \frac{\hat{\sigma}_{xxa} \cdot \hat{\sigma}_{zza}}{\check{\Phi}} - \Delta\alpha_{xx} \cdot \Delta\alpha_{zz} + \\
& \quad \frac{\hat{\sigma}_{yya} \cdot \hat{\sigma}_{zza}}{\check{\Phi}} - \Delta\alpha_{yy} \cdot \Delta\alpha_{zz} + \\
& \quad \left. \left. \frac{\hat{\sigma}_{yza}^2}{\check{\Phi}} - \Delta\alpha_{yz}^2 \right) \right] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. \frac{\hat{\sigma}_{xxa}^2}{\check{\Phi}} - \Delta\alpha_{xx}^2 \right) \Bigg] - \\
4 \cdot & \left[\hat{\sigma}_{xxa} \cdot \hat{\sigma}_{xya} \cdot \left(\frac{\hat{\sigma}_{yya} \cdot \hat{\sigma}_{xya}}{\check{\Phi}} - \Delta\alpha_{yy} \cdot \Delta\alpha_{xy} + \right. \right. \\
& \quad \left. \frac{\hat{\sigma}_{zza} \cdot \hat{\sigma}_{xya}}{\check{\Phi}} - \Delta\alpha_{zz} \cdot \Delta\alpha_{xy} \right) + \\
& \hat{\sigma}_{xxa} \cdot \hat{\sigma}_{xza} \cdot \left(\frac{\hat{\sigma}_{yya} \cdot \hat{\sigma}_{xza}}{\check{\Phi}} - \Delta\alpha_{yy} \cdot \Delta\alpha_{xz} + \right. \\
& \quad \left. \frac{\hat{\sigma}_{zza} \cdot \hat{\sigma}_{xza}}{\check{\Phi}} - \Delta\alpha_{zz} \cdot \Delta\alpha_{xz} \right) + \\
& \hat{\sigma}_{xxa} \cdot \hat{\sigma}_{yza} \cdot \left(\frac{\hat{\sigma}_{yya} \cdot \hat{\sigma}_{yza}}{\check{\Phi}} - \Delta\alpha_{yy} \cdot \Delta\alpha_{yz} + \right. \\
& \quad \left. \frac{\hat{\sigma}_{zza} \cdot \hat{\sigma}_{yza}}{\check{\Phi}} - \Delta\alpha_{zz} \cdot \Delta\alpha_{yz} \right) + \\
& \hat{\sigma}_{yya} \cdot \hat{\sigma}_{xya} \cdot \left(\frac{\hat{\sigma}_{xxa} \cdot \hat{\sigma}_{xya}}{\check{\Phi}} - \Delta\alpha_{xx} \cdot \Delta\alpha_{xy} + \right. \\
& \quad \left. \frac{\hat{\sigma}_{zza} \cdot \hat{\sigma}_{xya}}{\check{\Phi}} - \Delta\alpha_{zz} \cdot \Delta\alpha_{xy} \right) + \\
& \hat{\sigma}_{yya} \cdot \hat{\sigma}_{xza} \cdot \left(\frac{\hat{\sigma}_{xxa} \cdot \hat{\sigma}_{xza}}{\check{\Phi}} - \Delta\alpha_{xx} \cdot \Delta\alpha_{xz} + \right. \\
& \quad \left. \frac{\hat{\sigma}_{zza} \cdot \hat{\sigma}_{xza}}{\check{\Phi}} - \Delta\alpha_{zz} \cdot \Delta\alpha_{xz} \right) + \\
& \hat{\sigma}_{yya} \cdot \hat{\sigma}_{yza} \cdot \left(\frac{\hat{\sigma}_{xxa} \cdot \hat{\sigma}_{yza}}{\check{\Phi}} - \Delta\alpha_{xx} \cdot \Delta\alpha_{yz} + \right. \\
& \quad \left. \frac{\hat{\sigma}_{zza} \cdot \hat{\sigma}_{yza}}{\check{\Phi}} - \Delta\alpha_{zz} \cdot \Delta\alpha_{yz} \right) + \\
& \hat{\sigma}_{zza} \cdot \hat{\sigma}_{xya} \cdot \left(\frac{\hat{\sigma}_{xxa} \cdot \hat{\sigma}_{xya}}{\check{\Phi}} - \Delta\alpha_{xx} \cdot \Delta\alpha_{xy} + \right. \\
& \quad \left. \frac{\hat{\sigma}_{yya} \cdot \hat{\sigma}_{xya}}{\check{\Phi}} - \Delta\alpha_{yy} \cdot \Delta\alpha_{xy} \right) + \\
& \hat{\sigma}_{zza} \cdot \hat{\sigma}_{xza} \cdot \left(\frac{\hat{\sigma}_{xxa} \cdot \hat{\sigma}_{xza}}{\check{\Phi}} - \Delta\alpha_{xx} \cdot \Delta\alpha_{xz} + \right. \\
& \quad \left. \frac{\hat{\sigma}_{yya} \cdot \hat{\sigma}_{xza}}{\check{\Phi}} - \Delta\alpha_{yy} \cdot \Delta\alpha_{xz} \right) + \\
& \hat{\sigma}_{zza} \cdot \hat{\sigma}_{yza} \cdot \left(\frac{\hat{\sigma}_{xxa} \cdot \hat{\sigma}_{yza}}{\check{\Phi}} - \Delta\alpha_{xx} \cdot \Delta\alpha_{yz} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left. \frac{\hat{\sigma}_{yya} \cdot \hat{\sigma}_{yza}}{\check{\Phi}} - \Delta\alpha_{yy} \cdot \Delta\alpha_{yz} \right) \Bigg] + \\
 & 8 \cdot \left[\hat{\sigma}_{xya} \cdot \hat{\sigma}_{xza} \cdot \left(\frac{\hat{\sigma}_{xya} \cdot \hat{\sigma}_{xza}}{\check{\Phi}} - \Delta\alpha_{xy} \cdot \Delta\alpha_{xz} \right) + \right. \\
 & \quad \hat{\sigma}_{xya} \cdot \hat{\sigma}_{yza} \cdot \left(\frac{\hat{\sigma}_{xya} \cdot \hat{\sigma}_{yza}}{\check{\Phi}} - \Delta\alpha_{xy} \cdot \Delta\alpha_{yz} \right) + \\
 & \quad \left. \hat{\sigma}_{xza} \cdot \hat{\sigma}_{yza} \cdot \left(\frac{\hat{\sigma}_{xza} \cdot \hat{\sigma}_{yza}}{\check{\Phi}} - \Delta\alpha_{xz} \cdot \Delta\alpha_{yz} \right) \right] \Bigg\} - \\
 & k_a^2 \cdot \left\{ \left(\hat{\sigma}_{xxa}^2 + \hat{\sigma}_{xxa} \cdot \hat{\sigma}_{yya} + \hat{\sigma}_{xxa} \cdot \hat{\sigma}_{zxa} \right) \cdot \right. \\
 & \quad \left[\frac{\hat{\sigma}_{xxa} \cdot \hat{\sigma}_{yya}}{\check{\Phi}} - \Delta\alpha_{xx} \cdot \Delta\alpha_{yy} + \frac{\hat{\sigma}_{yya}^2}{\check{\Phi}} - \Delta\alpha_{yy}^2 + \right. \\
 & \quad \frac{\hat{\sigma}_{xxa} \cdot \hat{\sigma}_{zxa}}{\check{\Phi}} - \Delta\alpha_{xx} \cdot \Delta\alpha_{zz} + \frac{\hat{\sigma}_{zxa}^2}{\check{\Phi}} - \Delta\alpha_{zz}^2 + \\
 & \quad \left. 2 \cdot \left(\frac{\hat{\sigma}_{yya} \cdot \hat{\sigma}_{zxa}}{\check{\Phi}} - \Delta\alpha_{yy} \cdot \Delta\alpha_{zz} \right) \right] + \\
 & \quad \left(\hat{\sigma}_{xxa} \cdot \hat{\sigma}_{yya} + \hat{\sigma}_{yya}^2 + \hat{\sigma}_{yya} \cdot \hat{\sigma}_{zxa} \right) \cdot \\
 & \quad \left[\frac{\hat{\sigma}_{xxa} \cdot \hat{\sigma}_{yya}}{\check{\Phi}} - \Delta\alpha_{xx} \cdot \Delta\alpha_{yy} + \frac{\hat{\sigma}_{xxa}^2}{\check{\Phi}} - \Delta\alpha_{xx}^2 + \right. \\
 & \quad \frac{\hat{\sigma}_{yya} \cdot \hat{\sigma}_{zxa}}{\check{\Phi}} - \Delta\alpha_{yy} \cdot \Delta\alpha_{zz} + \frac{\hat{\sigma}_{zxa}^2}{\check{\Phi}} - \Delta\alpha_{zz}^2 + \\
 & \quad \left. 2 \cdot \left(\frac{\hat{\sigma}_{xxa} \cdot \hat{\sigma}_{zxa}}{\check{\Phi}} - \Delta\alpha_{xx} \cdot \Delta\alpha_{zz} \right) \right] + \\
 & \quad \left(\hat{\sigma}_{xxa} \cdot \hat{\sigma}_{zxa} + \hat{\sigma}_{yya} \cdot \hat{\sigma}_{zxa} + \hat{\sigma}_{zxa}^2 \right) \cdot \\
 & \quad \left[\frac{\hat{\sigma}_{xxa} \cdot \hat{\sigma}_{zxa}}{\check{\Phi}} - \Delta\alpha_{xx} \cdot \Delta\alpha_{zz} + \frac{\hat{\sigma}_{xxa}^2}{\check{\Phi}} - \Delta\alpha_{xx}^2 + \right. \\
 & \quad \frac{\hat{\sigma}_{yya} \cdot \hat{\sigma}_{zxa}}{\check{\Phi}} - \Delta\alpha_{yy} \cdot \Delta\alpha_{zz} + \frac{\hat{\sigma}_{yya}^2}{\check{\Phi}} - \Delta\alpha_{yy}^2 + \\
 & \quad \left. 2 \cdot \left(\frac{\hat{\sigma}_{xxa} \cdot \hat{\sigma}_{yya}}{\check{\Phi}} - \Delta\alpha_{xx} \cdot \Delta\alpha_{yy} \right) \right] - \\
 & \quad \left. 2 \cdot \left(\hat{\sigma}_{xxa} \cdot \hat{\sigma}_{xya} + \hat{\sigma}_{yya} \cdot \hat{\sigma}_{xya} + \hat{\sigma}_{zxa} \cdot \hat{\sigma}_{xya} \right) \cdot \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{\hat{\sigma}_{xxa} \cdot \hat{\sigma}_{xya}}{\check{\Phi}} - \Delta\alpha_{xx} \cdot \Delta\alpha_{xy} + \right. \\
& \quad \frac{\hat{\sigma}_{yya} \cdot \hat{\sigma}_{xya}}{\check{\Phi}} - \Delta\alpha_{yy} \cdot \Delta\alpha_{xy} + \\
& \quad \left. \frac{\hat{\sigma}_{zza} \cdot \hat{\sigma}_{xya}}{\check{\Phi}} - \Delta\alpha_{zz} \cdot \Delta\alpha_{xy} \right] - \\
& 2 \cdot (\hat{\sigma}_{xxa} \cdot \hat{\sigma}_{xza} + \hat{\sigma}_{yya} \cdot \hat{\sigma}_{xza} + \hat{\sigma}_{zza} \cdot \hat{\sigma}_{xza}) \cdot \\
& \left[\frac{\hat{\sigma}_{xxa} \cdot \hat{\sigma}_{xza}}{\check{\Phi}} - \Delta\alpha_{xx} \cdot \Delta\alpha_{xz} + \right. \\
& \quad \frac{\hat{\sigma}_{yya} \cdot \hat{\sigma}_{xza}}{\check{\Phi}} - \Delta\alpha_{yy} \cdot \Delta\alpha_{xz} + \\
& \quad \left. \frac{\hat{\sigma}_{zza} \cdot \hat{\sigma}_{xza}}{\check{\Phi}} - \Delta\alpha_{zz} \cdot \Delta\alpha_{xz} \right] - \\
& 2 \cdot (\hat{\sigma}_{xxa} \cdot \hat{\sigma}_{yza} + \hat{\sigma}_{yya} \cdot \hat{\sigma}_{yza} + \hat{\sigma}_{zza} \cdot \hat{\sigma}_{yza}) \cdot \\
& \left[\frac{\hat{\sigma}_{xxa} \cdot \hat{\sigma}_{yza}}{\check{\Phi}} - \Delta\alpha_{xx} \cdot \Delta\alpha_{yz} + \right. \\
& \quad \frac{\hat{\sigma}_{yya} \cdot \hat{\sigma}_{yza}}{\check{\Phi}} - \Delta\alpha_{yy} \cdot \Delta\alpha_{yz} + \\
& \quad \left. \frac{\hat{\sigma}_{zza} \cdot \hat{\sigma}_{yza}}{\check{\Phi}} - \Delta\alpha_{zz} \cdot \Delta\alpha_{yz} \right] \Bigg| \tag{A.8}
\end{aligned}$$

Diese Gleichung wird genau dann exakt befriedigt, wenn alle Differenzen für sich Null werden, so daß dieses Gleichungssystem zur Festlegung der Gewichtungsfaktoren bei synchroner Beanspruchung vereinfachend genutzt werden kann.

B Diagramme der Fließbehinderung φ

Im folgenden werden die mit Gl.(3.103)

$$\varphi_{gek,Zug} \approx \frac{1 + 8,19 \cdot (a - 0,438) + 4,726 \cdot b \cdot \chi \cdot (a - 0,343)^2}{1 + 8,19 \cdot (a - 0,438) + 2,037 \cdot b \cdot \chi \cdot (a - 0,262)^2}$$

berechneten Kurven der Fließbehinderung φ für zugbeanspruchte, gekerbte Rund- und Flachstäbe dargestellt. Der Wert der Fließbehinderung für abgesetzte Rund- und Flachstäbe wird mit der Schätzformel Gl.(3.103) berechnet, während für die Belastungsart Biegung Gl.(3.104) und für zusammengesetzte Belastungen die Gleichungen Gl.(3.105) und Gl.(3.106) gelten.

Für χ ist der Anteil des bezogenen Anstrengungsgefälles einzusetzen, der auf die

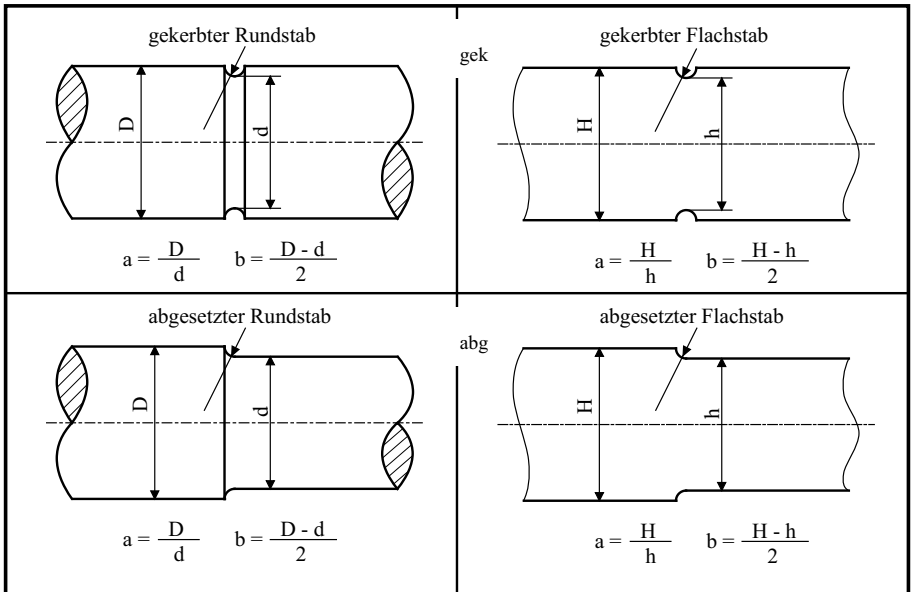


Abbildung 3.16: Bestimmung der Geometrieparameter a und b für gekerbte bzw. abgesetzte Rund- und Flachstäbe

Kerbgeometrie zurückzuführen ist, also abzüglich des bezogenen Anstrengungsgefälles χ_0 aus der Belastung (s. **Abbildung B.1**). Die Geometrieparameter a und b werden entsprechend **Abbildung 3.16**, die hier noch einmal dargestellt ist, bestimmt.

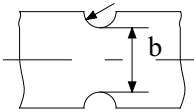
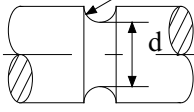
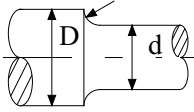
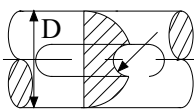
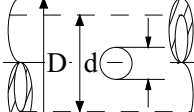
| Kerbform | Beanspr.- Art | χ_0 [mm ⁻¹] | χ [mm ⁻¹] |
|---|------------------|---------------------------------|-------------------------------|
|  | Zug-Druck | 0 | 2/ |
| | Biegung | 2/b | 2/b + 2/ |
|  | Zug-Druck | 0 | 2/ |
| | Biegung | 2/d | 2/d + 2/ |
| | Torsion | 2/d | 2/d + 1/ |
|  | Zug-Druck | 0 | 2/ |
| | Biegung | 4/(D+d) | 4/(D+d)+2/ |
| | Torsion | 4/(D+d) | 4/(D+d)+1/ |
|  | Torsion | 2/D | 2/D + 1/ |
|  | Biegung | 2/D | 2/D + 4/ |
| | Torsion | 2/D | 2/D + 3/ |

Abbildung B.1: Bezogenes Anstrengungsgefälle χ_0 aus der Belastung und χ aus der Belastung und der Kerbe, entnommen [67]

B.1 Diagramme für konstante Durchmesser-Verhältnisse

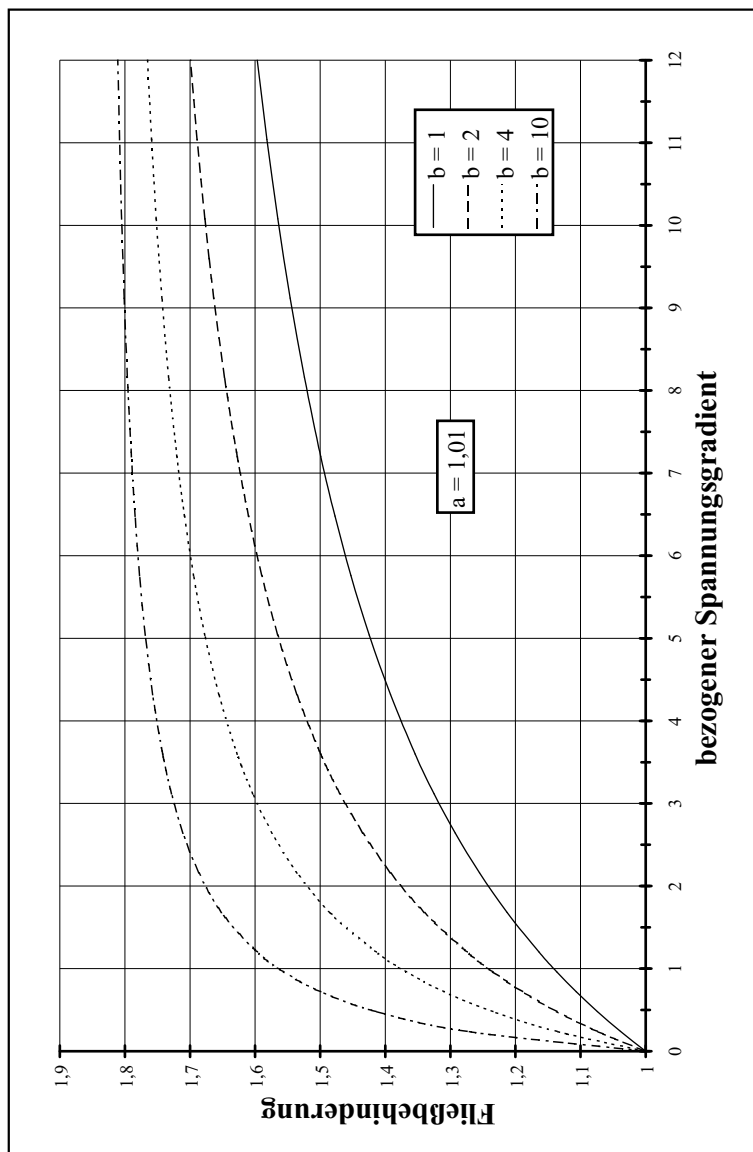


Abbildung B.2: Fließbehinderung φ für ein festes Verhältnis $a=1,01$ und verschiedene Verhältnisse b

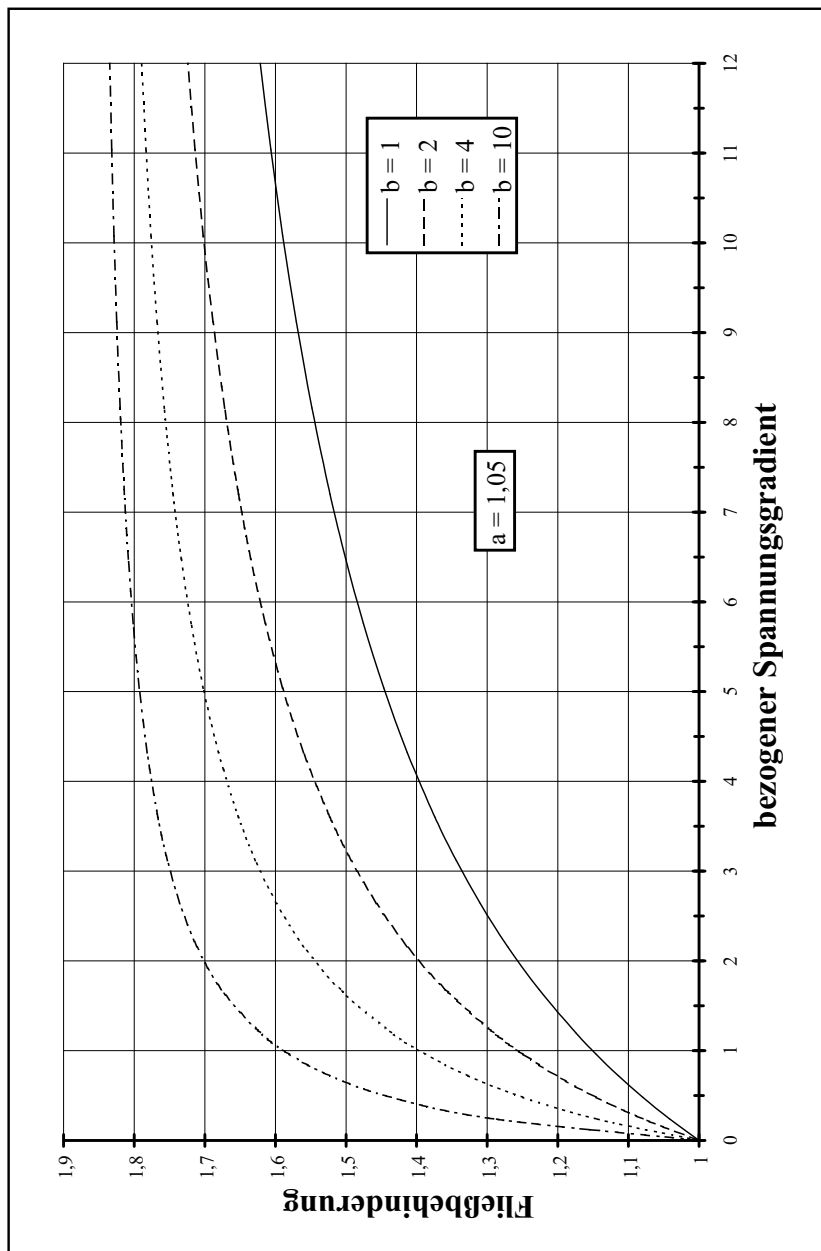


Abbildung B.3: Fließbehinderung φ für ein festes Verhältnis $a=1,05$ und verschiedene Verhältnisse b

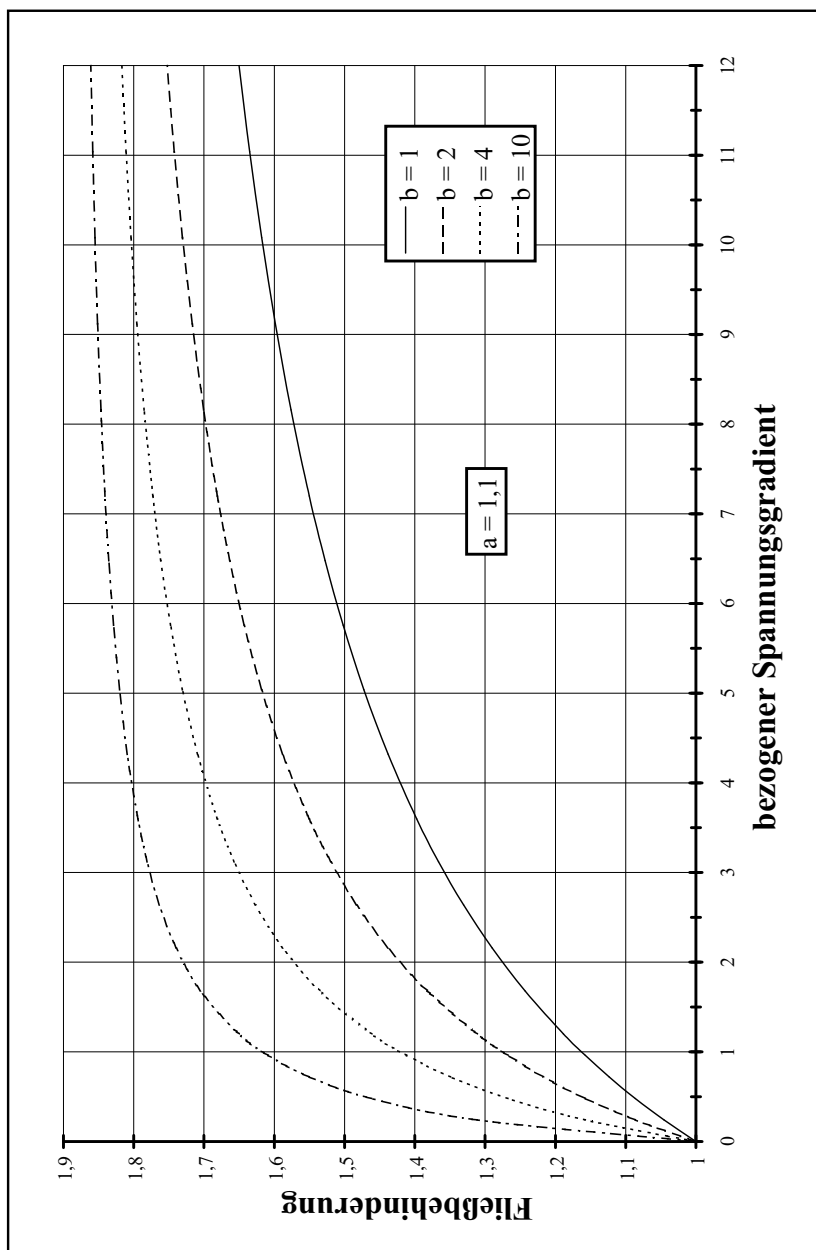


Abbildung B.4: Fließbehinderung φ für ein festes Verhältnis $a=1,1$ und verschiedene Verhältnisse b

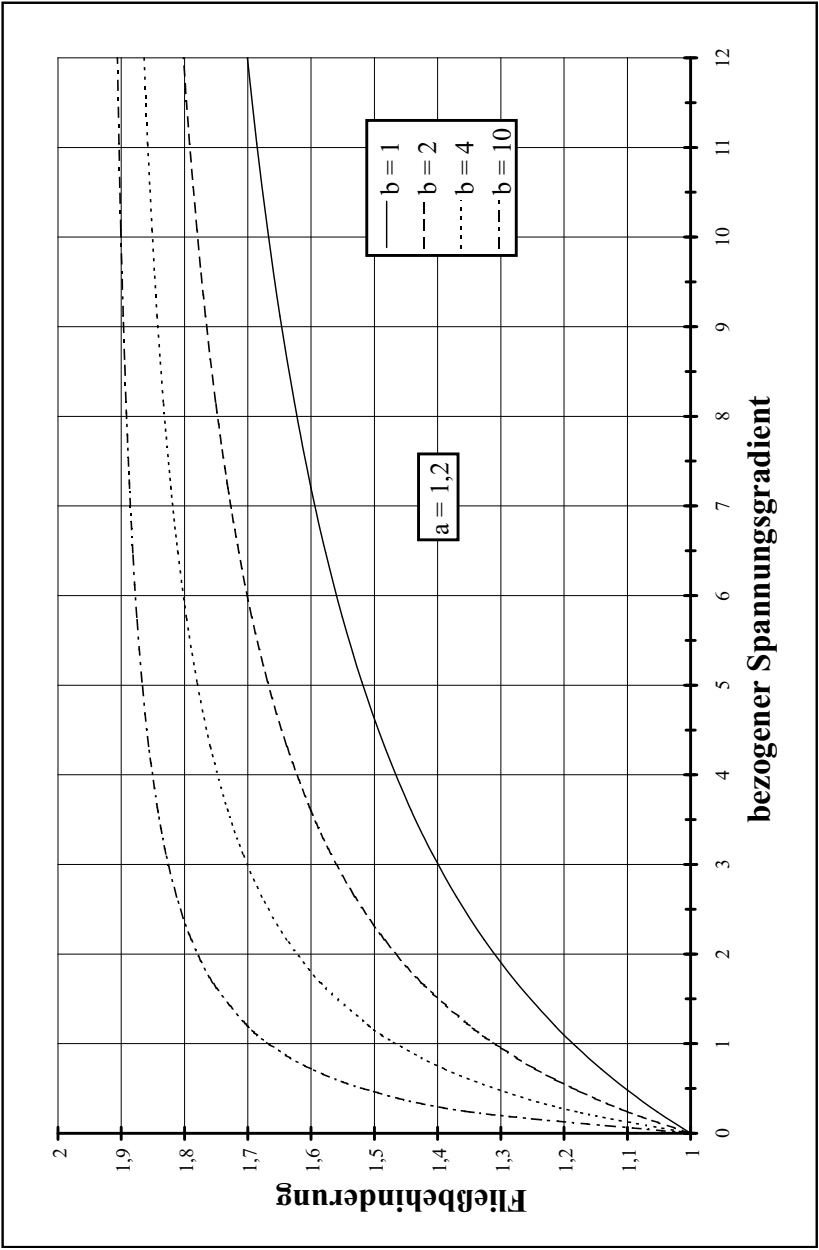


Abbildung B.5: Fließbehinderung φ für ein festes Verhältnis $a=1,2$ und verschiedene Verhältnisse b

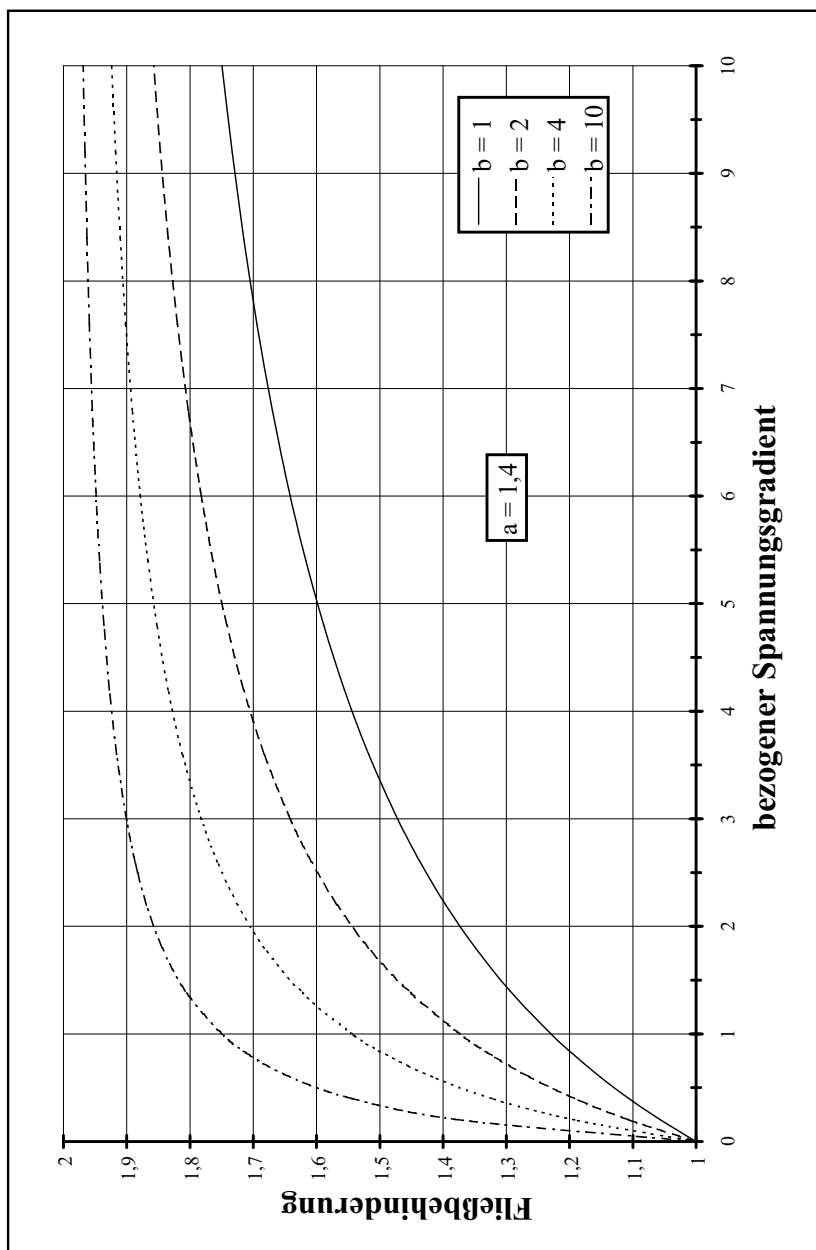


Abbildung B.6: Fließbehinderung φ für ein festes Verhältnis $a=1,4$ und verschiedene Verhältnisse b

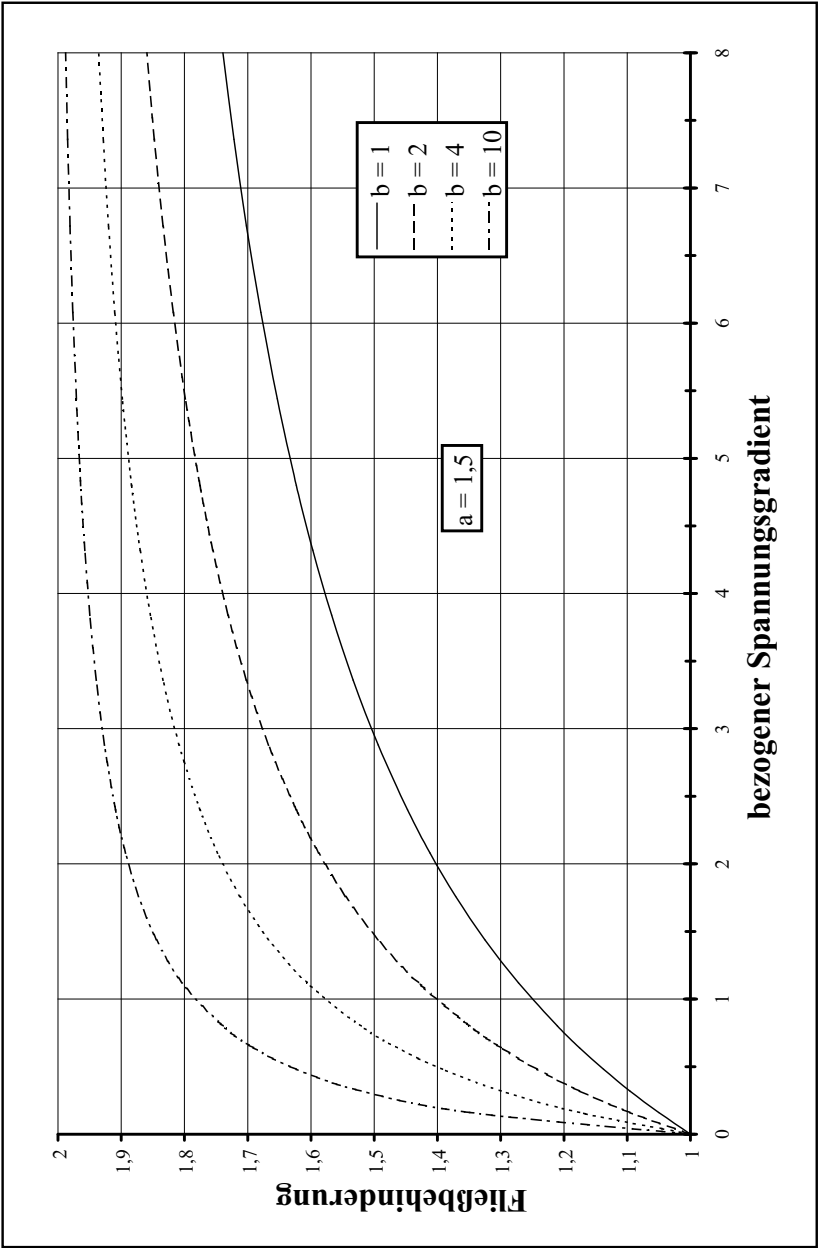


Abbildung B.7: Fließbehinderung φ für ein festes Verhältnis $a=1,5$ und verschiedene Verhältnisse b

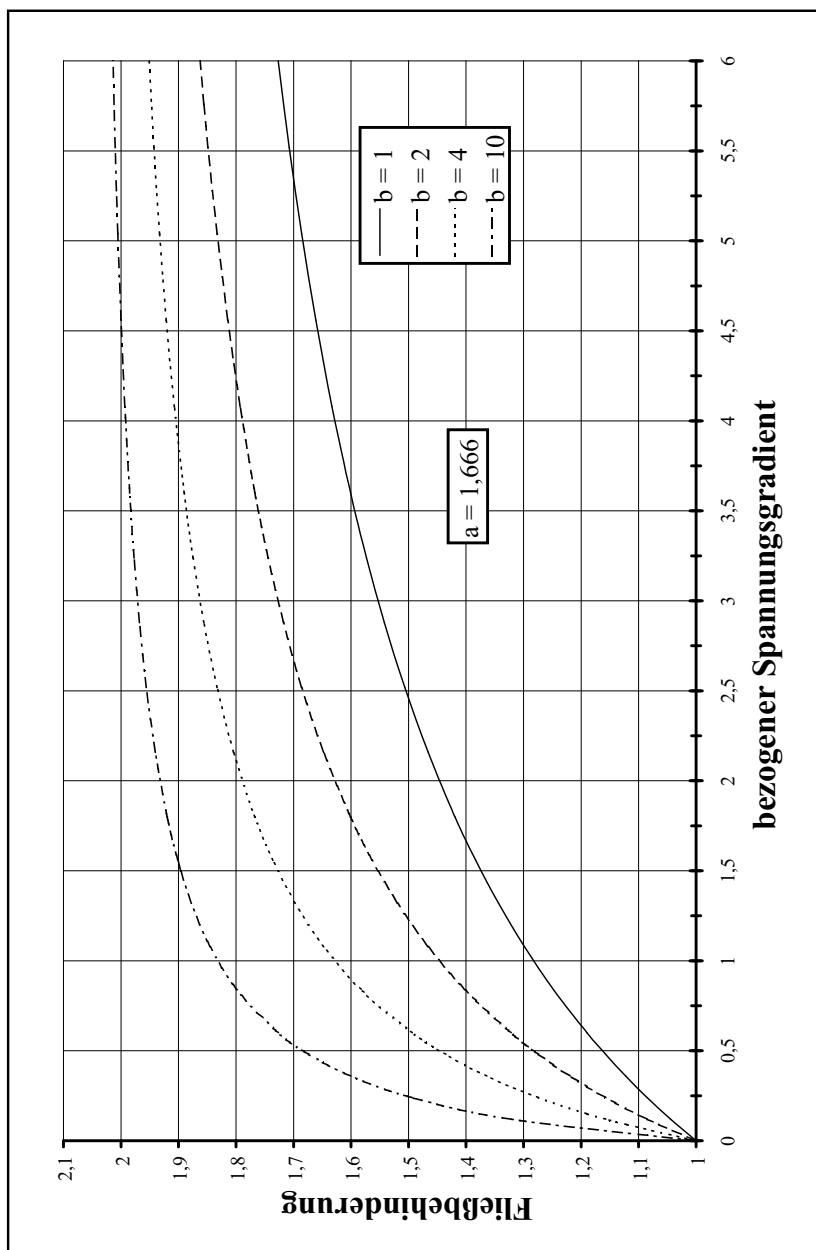


Abbildung B.8: Fließbehinderung φ für ein festes Verhältnis $a=1,667$ und verschiedene Verhältnisse b

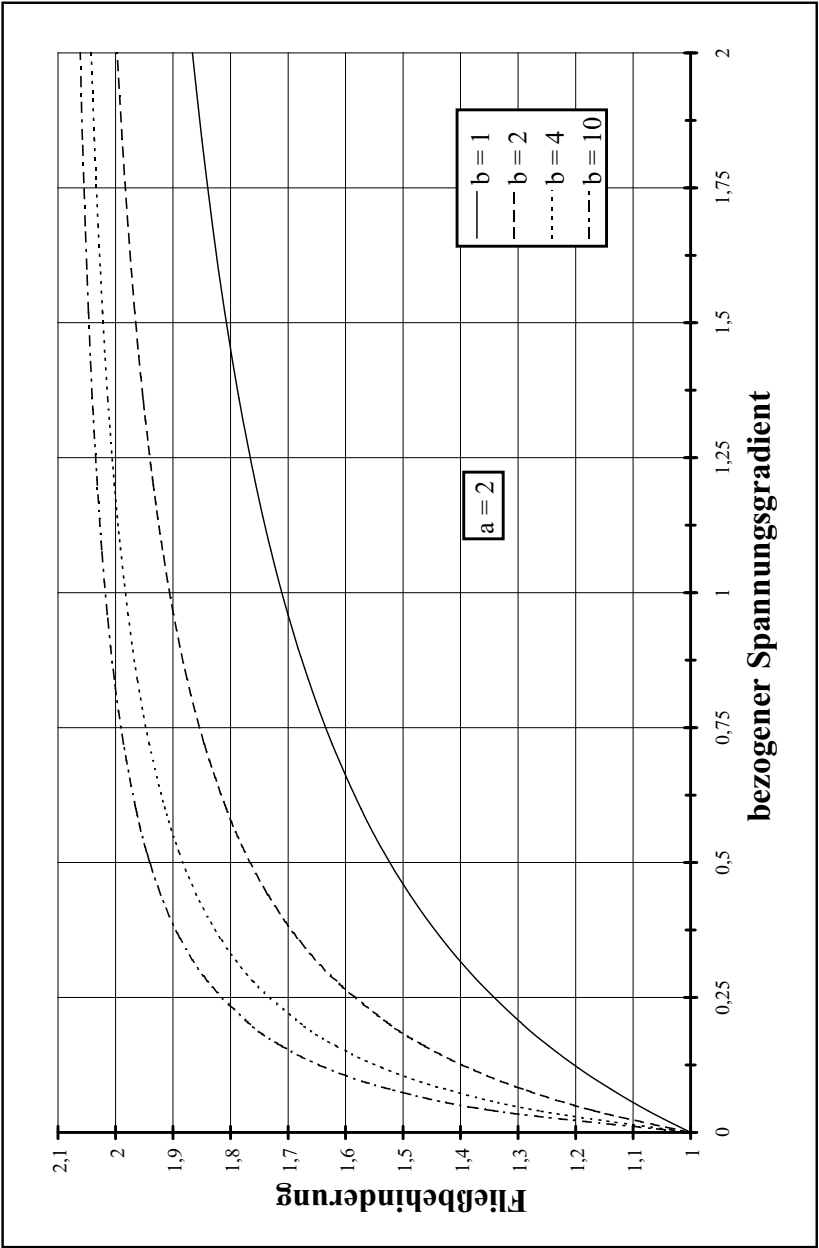


Abbildung B.9: Fließbehinderung φ für ein festes Verhältnis $a=2$ und verschiedene Verhältnisse b

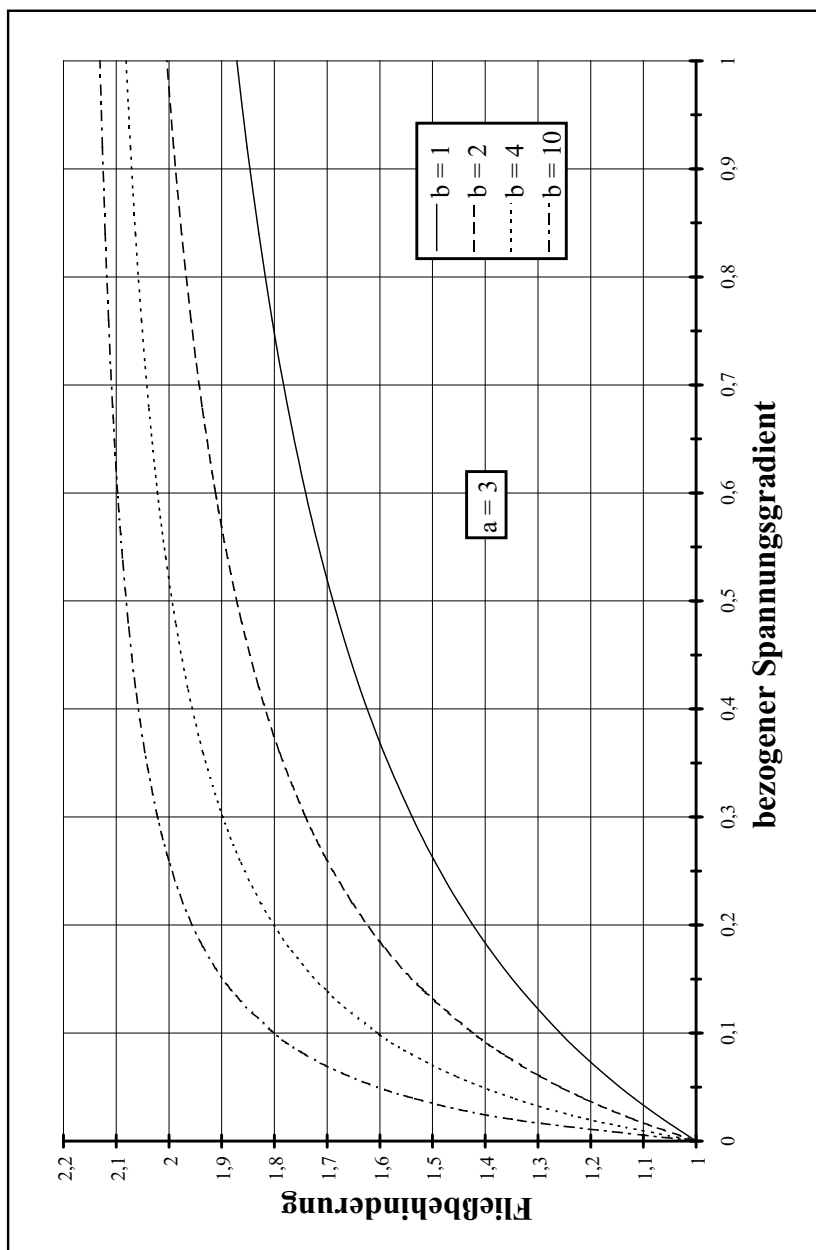


Abbildung B.10: Fließbehinderung φ für ein festes Verhältnis $a=3$ und verschiedene Verhältnisse b

B.2 Diagramme für konstante Kerbtiefe

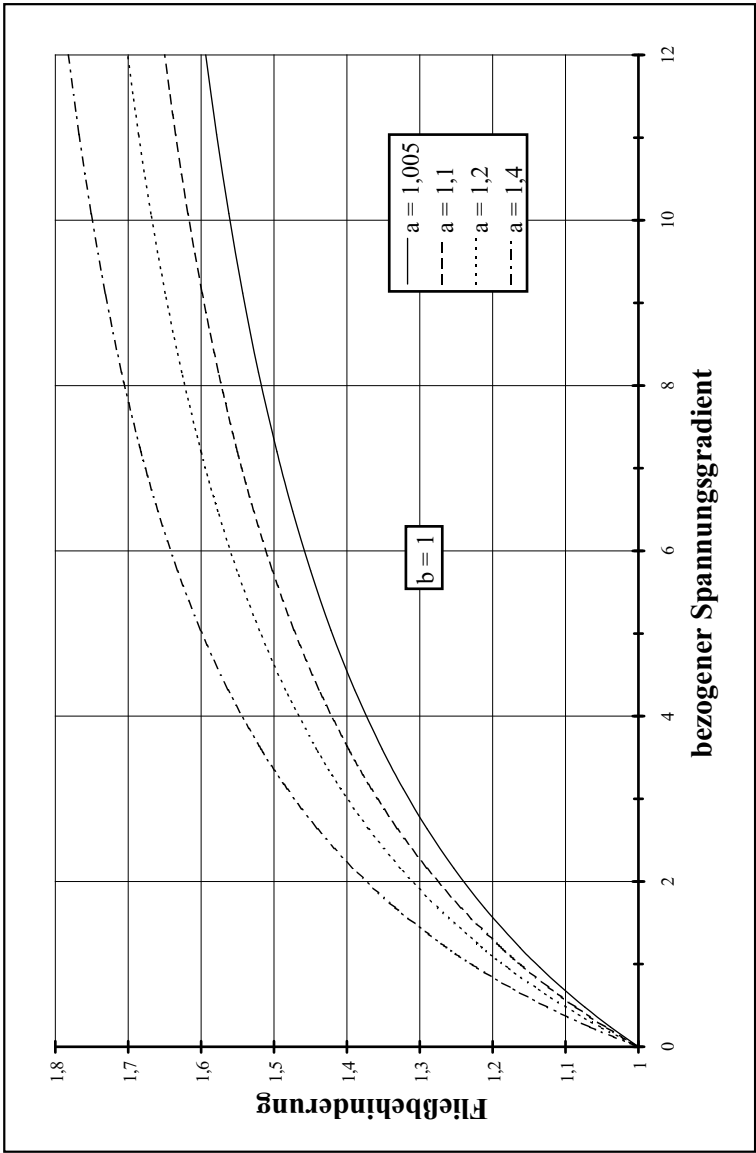


Abbildung B.11: Fließbehinderung φ für ein festes Verhältnis $b=1$ und verschiedene Verhältnisse a

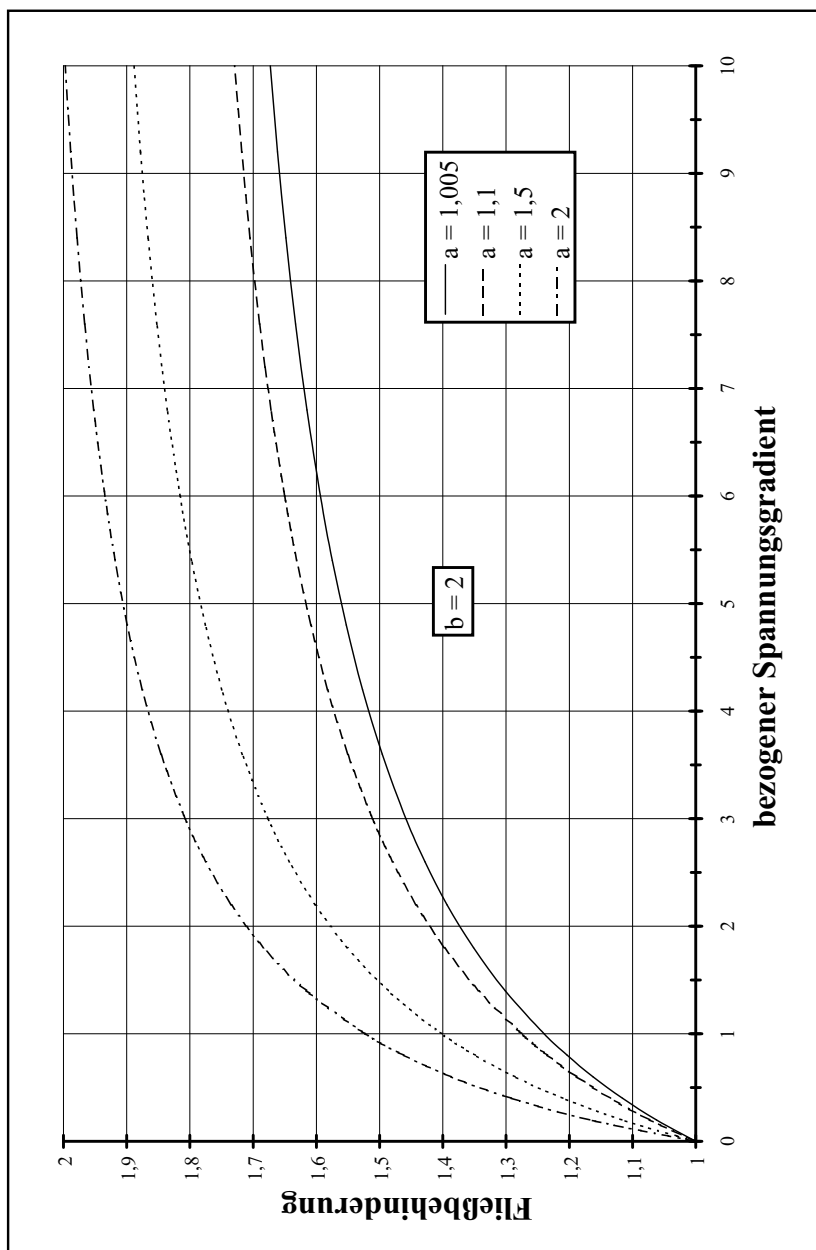


Abbildung B.12: Fließbehinderung φ für ein festes Verhältnis $b=2$ und verschiedene Verhältnisse a

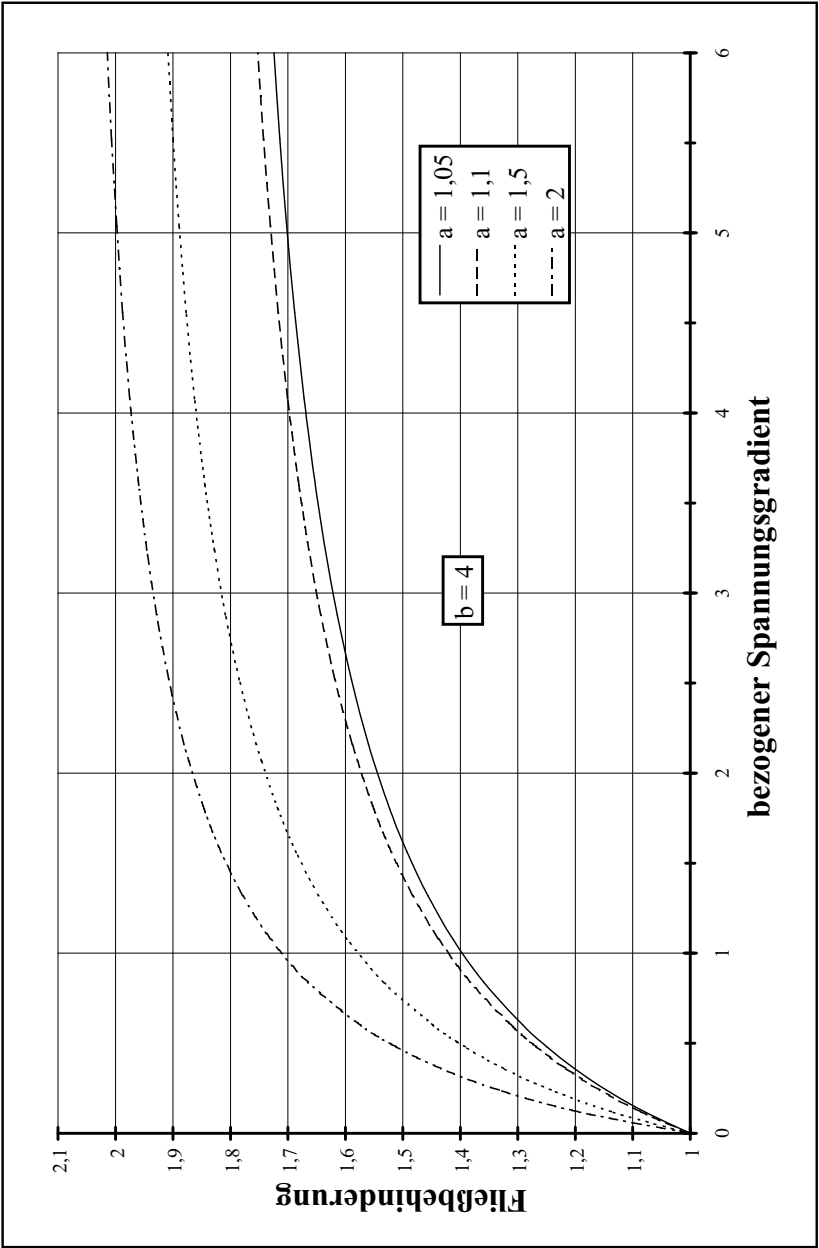


Abbildung B.13: Fließbehinderung φ für ein festes Verhältnis $b=4$ und verschiedene Verhältnisse a

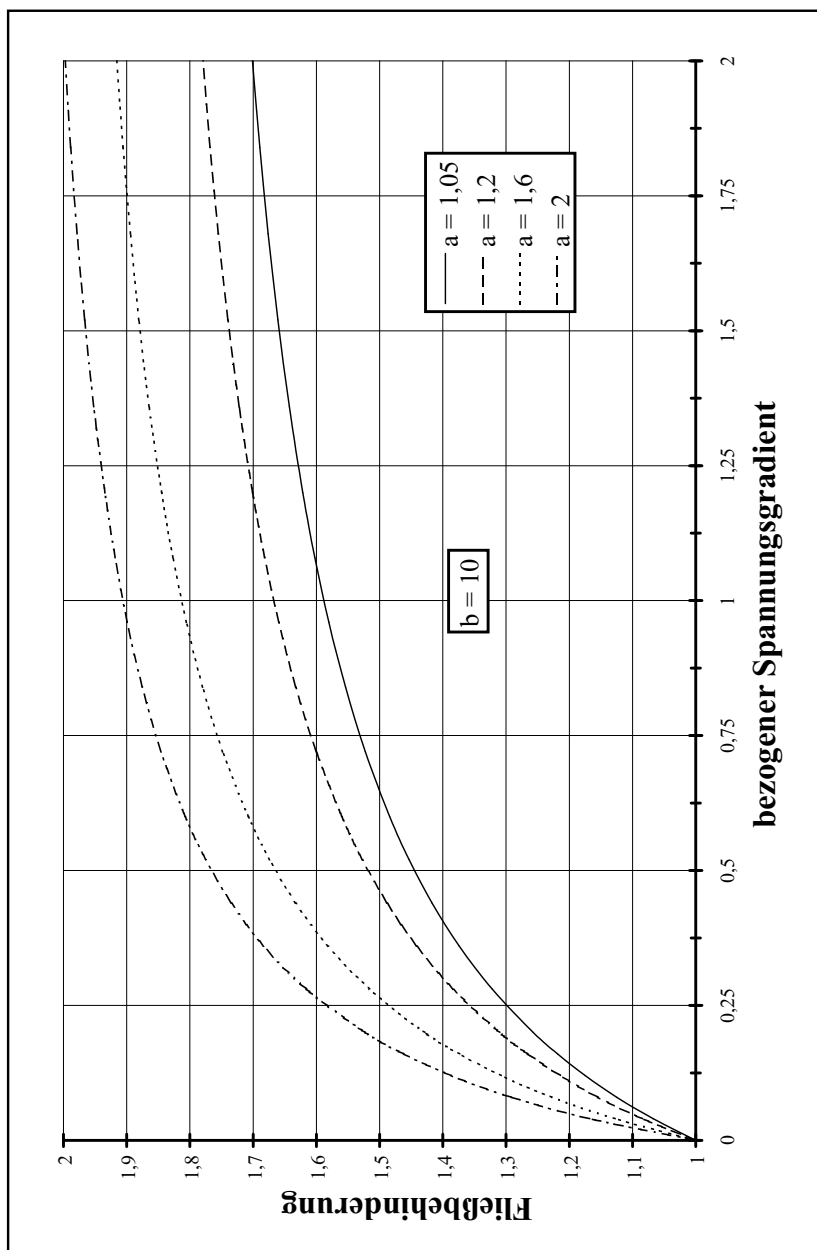


Abbildung B.14: Fließbehinderung φ für ein festes Verhältnis $b=10$ und verschiedene Verhältnisse a

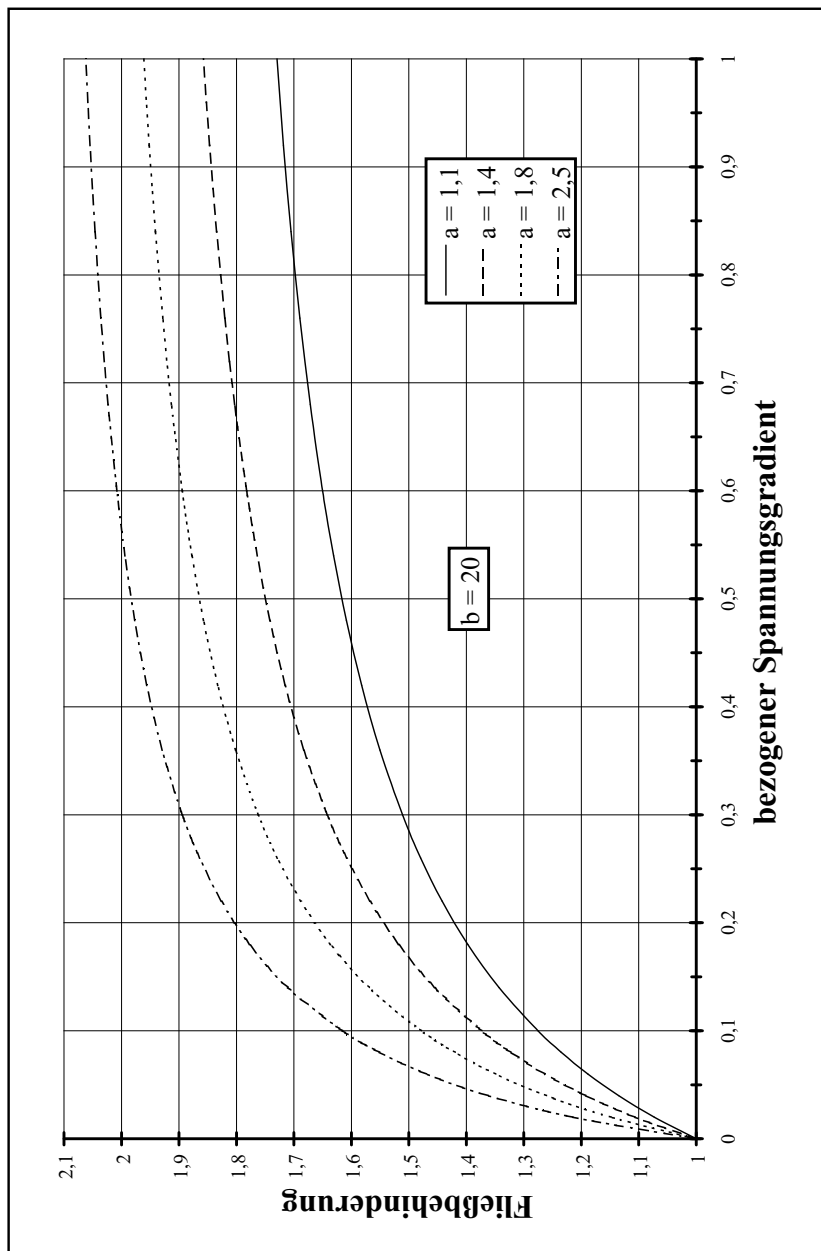


Abbildung B.15: Fließbehinderung φ für ein festes Verhältnis $b=20$ und verschiedene Verhältnisse a

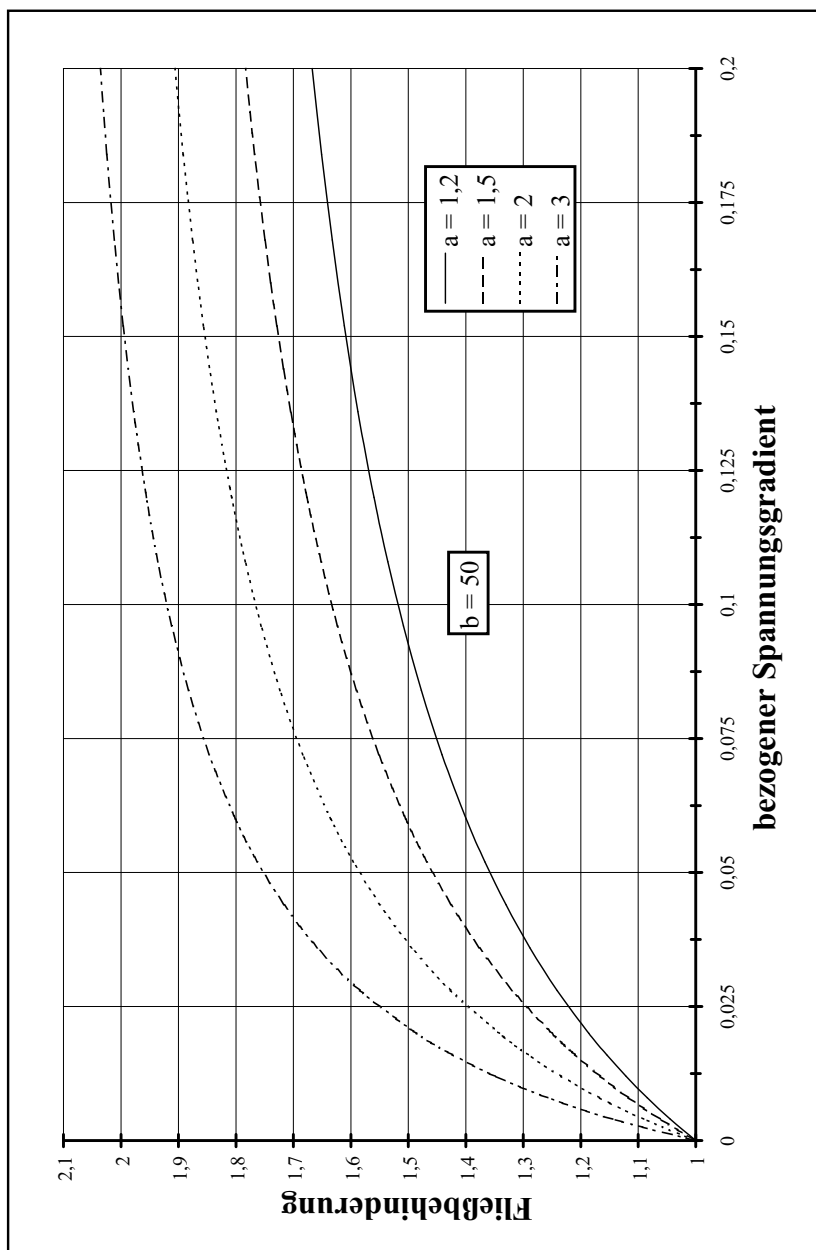


Abbildung B.16: Fließbehinderung φ für ein festes Verhältnis $b=50$ und verschiedene Verhältnisse a

C Tabellarische Zusammenstellung von Mikrostützziffern

Tabelle C.1: Mikrostützziffern der Invarianten I_1 (Biegebeanspruchung) und I_2 (Torsionsbeanspruchung) für glatte Rundstäbe mit verschiedenen Durchmesser D und Werkstoffstrukturlängen ρ^* berechnet nach Gl.(3.61 und 3.62)

| Biegebeanspruchung | | | | Torsionsbeanspruchung | | | |
|--------------------|----------|-----------|------------------|-----------------------|----------|-----------|------------------|
| D | ρ^* | $n_{V,1}$ | $n_{H,1}^2$ [21] | D | ρ^* | $n_{V,2}$ | $n_{H,2}^2$ [21] |
| 10 | 0,2 | 1,031 | 1,040 | 10 | 0,2 | 1,030 | 1,040 |
| 10 | 0,1 | 1,015 | 1,020 | 10 | 0,1 | 1,015 | 1,020 |
| 10 | 0,02 | 1,003 | 1,004 | 10 | 0,02 | 1,003 | 1,004 |
| 20 | 0,2 | 1,015 | 1,020 | 20 | 0,2 | 1,015 | 1,020 |
| 20 | 0,1 | 1,008 | 1,010 | 20 | 0,1 | 1,008 | 1,010 |
| 20 | 0,02 | 1,002 | 1,002 | 20 | 0,02 | 1,002 | 1,002 |
| 40 | 0,2 | 1,008 | 1,010 | 40 | 0,2 | 1,008 | 1,010 |
| 40 | 0,1 | 1,004 | 1,005 | 40 | 0,1 | 1,004 | 1,005 |
| 40 | 0,02 | 1,001 | 1,001 | 40 | 0,02 | 1,001 | 1,001 |

Tabelle C.2: Mikrostützziffern der Invarianten I_1 , I_2 und der *von Mises*- bzw. modifizierten *von Mises*-Vergleichsspannung für Rundstäbe mit Umlaufkerbe unter Zugbelastung

| Werkstoffstrukturlänge $\rho^* = 0,2mm$, $d = 8mm$, $D = 16mm$ | | | | | | | | | | |
|---|--------------------|-----------|--------------------|-----------|---------------|----------------|-----------|-------|-------------------|---------------|
| | Gradientenkonzept | | | | | Volumenkonzept | | | | Hahn [21] |
| ρ | $\chi_{\hat{I}_1}$ | $n_{G,1}$ | $\chi_{\hat{I}_2}$ | $n_{G,2}$ | $n_{G,Mises}$ | $n_{V,1}$ | $n_{V,2}$ | K^2 | $n_{V,mod.Mises}$ | $n_{H,Mises}$ |
| 8 | 0,101 | 1,010 | 0,703 | 1,068 | 1,001 | 1,013 | 0,959 | 2,116 | 1,013 | 1,025 |
| 4 | 0,212 | 1,021 | 0,785 | 1,076 | 1,011 | 1,030 | 0,953 | 2,180 | 1,032 | 1,049 |
| 2 | 0,450 | 1,044 | 1,002 | 1,096 | 1,042 | 1,069 | 0,950 | 2,238 | 1,070 | 1,095 |
| 1,5 | 0,610 | 1,059 | 1,173 | 1,111 | 1,064 | 1,095 | 0,952 | 2,256 | 1,095 | 1,125 |
| 1 | 0,926 | 1,089 | 1,550 | 1,145 | 1,109 | 1,148 | 0,959 | 2,274 | 1,145 | 1,183 |
| 0,5 | 1,852 | 1,171 | 2,829 | 1,251 | 1,237 | 1,320 | 1,010 | 2,291 | 1,288 | 1,342 |
| 0,25 | 3,665 | 1,316 | 5,668 | 1,461 | 1,479 | 1,726 | 1,205 | 2,295 | 1,562 | 1,612 |
| 0,11 | 8,208 | 1,625 | 13,47 | 1,922 | 2,123 | 3,238 | 2,097 | 2,293 | 2,257 | 2,153 |
| Werkstoffstrukturlänge $\rho^* = 0,1mm$, $d = 8mm$, $D = 16mm$ | | | | | | | | | | |
| | Gradientenkonzept | | | | | Volumenkonzept | | | | Hahn [21] |
| ρ | $\chi_{\hat{I}_1}$ | $n_{G,1}$ | $\chi_{\hat{I}_2}$ | $n_{G,2}$ | $n_{G,Mises}$ | $n_{V,1}$ | $n_{V,2}$ | K^2 | $n_{V,mod.Mises}$ | $n_{H,Mises}$ |
| 8 | 0,101 | 1,005 | 0,703 | 1,035 | 1,001 | 1,002 | 0,998 | 2,116 | 1,001 | 1,012 |
| 4 | 0,212 | 1,011 | 0,785 | 1,038 | 1,005 | 1,013 | 0,977 | 2,180 | 1,014 | 1,025 |
| 2 | 0,450 | 1,022 | 1,002 | 1,049 | 1,021 | 1,031 | 0,971 | 2,238 | 1,033 | 1,049 |
| 1,5 | 0,610 | 1,030 | 1,173 | 1,057 | 1,032 | 1,046 | 0,966 | 2,256 | 1,048 | 1,065 |
| 1 | 0,926 | 1,045 | 1,550 | 1,075 | 1,054 | 1,070 | 0,963 | 2,274 | 1,073 | 1,095 |
| 0,5 | 1,852 | 1,089 | 2,829 | 1,133 | 1,117 | 1,149 | 0,964 | 2,291 | 1,147 | 1,183 |
| 0,25 | 3,665 | 1,169 | 5,668 | 1,252 | 1,234 | 1,314 | 1,006 | 2,295 | 1,287 | 1,342 |
| 0,11 | 8,208 | 1,349 | 13,47 | 1,532 | 1,517 | 1,831 | 1,254 | 2,293 | 1,628 | 1,679 |
| Werkstoffstrukturlänge $\rho^* = 0,05mm$, $d = 8mm$, $D = 16mm$ | | | | | | | | | | |
| | Gradientenkonzept | | | | | Volumenkonzept | | | | Hahn [21] |
| ρ | $\chi_{\hat{I}_1}$ | $n_{G,1}$ | $\chi_{\hat{I}_2}$ | $n_{G,2}$ | $n_{G,Mises}$ | $n_{V,1}$ | $n_{V,2}$ | K^2 | $n_{V,mod.Mises}$ | $n_{H,Mises}$ |
| 8 | 0,101 | 1,003 | 0,703 | 1,017 | 1,000 | 1,000 | 0,999 | 2,116 | 1,000 | 1,006 |
| 4 | 0,212 | 1,005 | 0,785 | 1,019 | 1,003 | 1,001 | 0,999 | 2,180 | 1,001 | 1,012 |
| 2 | 0,450 | 1,011 | 1,002 | 1,025 | 1,010 | 1,014 | 0,985 | 2,238 | 1,015 | 1,025 |
| 1,5 | 0,610 | 1,015 | 1,173 | 1,029 | 1,016 | 1,021 | 0,981 | 2,256 | 1,023 | 1,033 |
| 1 | 0,926 | 1,023 | 1,550 | 1,038 | 1,027 | 1,032 | 0,977 | 2,274 | 1,034 | 1,049 |
| 0,5 | 1,852 | 1,045 | 2,829 | 1,068 | 1,059 | 1,071 | 0,967 | 2,291 | 1,074 | 1,095 |
| 0,25 | 3,665 | 1,088 | 5,668 | 1,133 | 1,116 | 1,146 | 0,963 | 2,295 | 1,147 | 1,183 |
| 0,11 | 8,208 | 1,188 | 13,47 | 1,294 | 1,252 | 1,354 | 1,015 | 2,292 | 1,321 | 1,382 |

Tabelle C.2: Mikrostützziffern der Invarianten I_1 , I_2 und der *von Mises*- bzw. modifizierten *von Mises*-Vergleichsspannung für Rundstäbe mit Umlaufkerbe unter Zugbelastung

| | | | | | | | | | | |
|--|--------------------|-----------|--------------------|-----------|---------------|----------------|-----------|-------|-------------------|---------------|
| Werkstoffstrukturlänge $\rho^* = 0,026mm$, $d = 8mm$, $D = 16mm$ | | | | | | | | | | |
| | Gradientenkonzept | | | | | Volumenkonzept | | | | Hahn [21] |
| ρ | $\chi_{\hat{I}_1}$ | $n_{G,1}$ | $\chi_{\hat{I}_2}$ | $n_{G,2}$ | $n_{G,Mises}$ | $n_{V,1}$ | $n_{V,2}$ | K^2 | $n_{V,mod.Mises}$ | $n_{H,Mises}$ |
| 8 | 0,101 | 1,001 | 0,703 | 1,009 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 2,116 | 1,000 | 1,003 |
| 4 | 0,212 | 1,003 | 0,785 | 1,010 | 1,001 | 1,000 | 1,000 | 2,180 | 1,000 | 1,006 |
| 2 | 0,450 | 1,006 | 1,002 | 1,013 | 1,005 | 1,005 | 0,994 | 2,238 | 1,006 | 1,013 |
| 1,5 | 0,610 | 1,008 | 1,173 | 1,015 | 1,008 | 1,008 | 0,992 | 2,256 | 1,009 | 1,017 |
| 1 | 0,926 | 1,012 | 1,550 | 1,020 | 1,014 | 1,015 | 0,988 | 2,274 | 1,017 | 1,026 |
| 0,5 | 1,852 | 1,024 | 2,829 | 1,036 | 1,030 | 1,035 | 0,979 | 2,291 | 1,037 | 1,051 |
| 0,25 | 3,665 | 1,047 | 5,668 | 1,071 | 1,060 | 1,073 | 0,966 | 2,295 | 1,077 | 1,099 |
| 0,11 | 8,208 | 1,102 | 13,47 | 1,162 | 1,130 | 1,172 | 0,961 | 2,292 | 1,172 | 1,214 |

| | | | | | | | | | | |
|---|--------------------|-----------|--------------------|-----------|---------------|----------------|-----------|-------|-------------------|---------------|
| Werkstoffstrukturlänge $\rho^* = 0,2mm$, $d = 20mm$, $D = 28mm$ | | | | | | | | | | |
| | Gradientenkonzept | | | | | Volumenkonzept | | | | Hahn [21] |
| ρ | $\chi_{\hat{I}_1}$ | $n_{G,1}$ | $\chi_{\hat{I}_2}$ | $n_{G,2}$ | $n_{G,Mises}$ | $n_{V,1}$ | $n_{V,2}$ | K^2 | $n_{V,mod.Mises}$ | $n_{H,Mises}$ |
| 8 | 0,140 | 1,014 | 0,306 | 1,030 | 1,013 | 1,018 | 0,982 | 2,182 | 1,016 | 1,025 |
| 4 | 0,281 | 1,028 | 0,436 | 1,043 | 1,033 | 1,041 | 0,975 | 2,224 | 1,038 | 1,049 |
| 2 | 0,540 | 1,053 | 0,748 | 1,072 | 1,069 | 1,083 | 0,968 | 2,252 | 1,078 | 1,095 |
| 1,5 | 0,706 | 1,068 | 0,974 | 1,093 | 1,092 | 1,111 | 0,966 | 2,259 | 1,103 | 1,125 |
| 1 | 1,029 | 1,098 | 1,450 | 1,136 | 1,133 | 1,166 | 0,970 | 2,267 | 1,153 | 1,183 |
| 0,5 | 1,963 | 1,180 | 2,969 | 1,262 | 1,248 | 1,341 | 1,015 | 2,274 | 1,295 | 1,342 |
| 0,25 | 3,772 | 1,325 | 6,154 | 1,494 | 1,464 | 1,754 | 1,207 | 2,277 | 1,567 | 1,612 |
| 0,11 | 8,340 | 1,633 | 14,75 | 1,987 | 2,035 | 3,293 | 2,106 | 2,277 | 2,260 | 2,153 |

| | | | | | | | | | | |
|---|--------------------|-----------|--------------------|-----------|---------------|----------------|-----------|-------|-------------------|---------------|
| Werkstoffstrukturlänge $\rho^* = 0,1mm$, $d = 20mm$, $D = 28mm$ | | | | | | | | | | |
| | Gradientenkonzept | | | | | Volumenkonzept | | | | Hahn [21] |
| ρ | $\chi_{\hat{I}_1}$ | $n_{G,1}$ | $\chi_{\hat{I}_2}$ | $n_{G,2}$ | $n_{G,Mises}$ | $n_{V,1}$ | $n_{V,2}$ | K^2 | $n_{V,mod.Mises}$ | $n_{H,Mises}$ |
| 8 | 0,140 | 1,007 | 0,306 | 1,015 | 1,007 | 1,002 | 0,998 | 2,182 | 1,002 | 1,012 |
| 4 | 0,281 | 1,014 | 0,436 | 1,022 | 1,017 | 1,018 | 0,987 | 2,224 | 1,017 | 1,025 |
| 2 | 0,540 | 1,027 | 0,748 | 1,037 | 1,035 | 1,037 | 0,979 | 2,252 | 1,036 | 1,049 |
| 1,5 | 0,706 | 1,035 | 0,974 | 1,048 | 1,046 | 1,054 | 0,973 | 2,259 | 1,053 | 1,065 |
| 1 | 1,029 | 1,050 | 1,450 | 1,070 | 1,067 | 1,079 | 0,968 | 2,267 | 1,077 | 1,095 |
| 0,5 | 1,963 | 1,094 | 2,969 | 1,139 | 1,123 | 1,158 | 0,964 | 2,274 | 1,151 | 1,183 |
| 0,25 | 3,772 | 1,174 | 6,154 | 1,271 | 1,228 | 1,325 | 1,002 | 2,277 | 1,289 | 1,342 |
| 0,11 | 8,340 | 1,354 | 14,75 | 1,573 | 1,488 | 1,855 | 1,252 | 2,277 | 1,633 | 1,679 |

Tabelle C.2: Mikrostützziffern der Invarianten I_1 , I_2 und der *von Mises*- bzw. modifizierten *von Mises*-Vergleichsspannung für Rundstäbe mit Umlaufkerbe unter Zugbelastung

| Werkstoffstrukturlänge $\rho^* = 0,05mm$, $d = 20mm$, $D = 28mm$ | | | | | | | | | | |
|---|--------------------|-----------|--------------------|-----------|---------------|----------------|-----------|-------|-------------------|---------------|
| | Gradientenkonzept | | | | | Volumenkonzept | | | | Hahn [21] |
| ρ | $\chi_{\hat{I}_1}$ | $n_{G,1}$ | $\chi_{\hat{I}_2}$ | $n_{G,2}$ | $n_{G,Mises}$ | $n_{V,1}$ | $n_{V,2}$ | K^2 | $n_{V,mod.Mises}$ | $n_{H,Mises}$ |
| 8 | 0,140 | 1,004 | 0,306 | 1,008 | 1,003 | 1,000 | 1,000 | 2,182 | 1,000 | 1,006 |
| 4 | 0,281 | 1,007 | 0,436 | 1,011 | 1,008 | 1,000 | 1,000 | 2,224 | 1,000 | 1,012 |
| 2 | 0,540 | 1,013 | 0,748 | 1,019 | 1,017 | 1,017 | 0,989 | 2,252 | 1,016 | 1,025 |
| 1,5 | 0,706 | 1,018 | 0,974 | 1,024 | 1,023 | 1,025 | 0,985 | 2,259 | 1,025 | 1,033 |
| 1 | 1,029 | 1,025 | 1,450 | 1,036 | 1,033 | 1,036 | 0,979 | 2,267 | 1,036 | 1,049 |
| 0,5 | 1,963 | 1,048 | 2,969 | 1,072 | 1,061 | 1,076 | 0,965 | 2,274 | 1,076 | 1,095 |
| 0,25 | 3,772 | 1,090 | 6,154 | 1,144 | 1,113 | 1,151 | 0,958 | 2,277 | 1,148 | 1,183 |
| 0,11 | 8,340 | 1,190 | 14,75 | 1,318 | 1,240 | 1,360 | 1,008 | 2,277 | 1,321 | 1,382 |
| Werkstoffstrukturlänge $\rho^* = 0,026mm$, $d = 20mm$, $D = 28mm$ | | | | | | | | | | |
| | Gradientenkonzept | | | | | Volumenkonzept | | | | Hahn [21] |
| ρ | $\chi_{\hat{I}_1}$ | $n_{G,1}$ | $\chi_{\hat{I}_2}$ | $n_{G,2}$ | $n_{G,Mises}$ | $n_{V,1}$ | $n_{V,2}$ | K^2 | $n_{V,mod.Mises}$ | $n_{H,Mises}$ |
| 8 | 0,140 | 1,002 | 0,306 | 1,004 | 1,002 | 1,000 | 1,000 | 2,182 | 1,000 | 1,003 |
| 4 | 0,281 | 1,004 | 0,436 | 1,006 | 1,004 | 1,000 | 1,000 | 2,224 | 1,000 | 1,006 |
| 2 | 0,540 | 1,007 | 0,748 | 1,010 | 1,009 | 1,006 | 0,996 | 2,252 | 1,006 | 1,013 |
| 1,5 | 0,706 | 1,009 | 0,974 | 1,013 | 1,012 | 1,010 | 0,994 | 2,259 | 1,009 | 1,017 |
| 1 | 1,029 | 1,013 | 1,450 | 1,019 | 1,017 | 1,017 | 0,989 | 2,267 | 1,017 | 1,026 |
| 0,5 | 1,963 | 1,025 | 2,969 | 1,038 | 1,032 | 1,037 | 0,978 | 2,274 | 1,038 | 1,051 |
| 0,25 | 3,772 | 1,048 | 6,154 | 1,077 | 1,059 | 1,075 | 0,963 | 2,277 | 1,077 | 1,099 |
| 0,11 | 8,340 | 1,103 | 14,75 | 1,176 | 1,123 | 1,174 | 0,955 | 2,277 | 1,171 | 1,214 |
| Werkstoffstrukturlänge $\rho^* = 0,2mm$, $d = 40mm$, $D = 48mm$ | | | | | | | | | | |
| | Gradientenkonzept | | | | | Volumenkonzept | | | | Hahn [21] |
| ρ | $\chi_{\hat{I}_1}$ | $n_{G,1}$ | $\chi_{\hat{I}_2}$ | $n_{G,2}$ | $n_{G,Mises}$ | $n_{V,1}$ | $n_{V,2}$ | K^2 | $n_{V,mod.Mises}$ | $n_{H,Mises}$ |
| 8 | 0,165 | 1,016 | 0,227 | 1,022 | 1,020 | 1,021 | 0,987 | 2,193 | 1,018 | 1,025 |
| 4 | 0,308 | 1,030 | 0,397 | 1,039 | 1,039 | 1,045 | 0,978 | 2,221 | 1,040 | 1,049 |
| 2 | 0,570 | 1,056 | 0,770 | 1,074 | 1,073 | 1,088 | 0,968 | 2,240 | 1,080 | 1,095 |
| 1,5 | 0,735 | 1,071 | 1,027 | 1,098 | 1,093 | 1,116 | 0,965 | 2,246 | 1,105 | 1,125 |
| 1 | 1,062 | 1,101 | 1,564 | 1,146 | 1,132 | 1,172 | 0,967 | 2,253 | 1,155 | 1,183 |
| 0,5 | 1,984 | 1,182 | 3,195 | 1,280 | 1,238 | 1,349 | 1,010 | 2,260 | 1,296 | 1,342 |
| 0,25 | 3,852 | 1,331 | 6,679 | 1,528 | 1,449 | 1,765 | 1,201 | 2,265 | 1,567 | 1,612 |
| 0,11 | 8,405 | 1,637 | 15,18 | 2,009 | 2,006 | 3,321 | 2,107 | 2,268 | 2,259 | 2,153 |

Tabelle C.2: Mikrostützziffern der Invarianten I_1, I_2 und der *von Mises*- bzw. modifizierten *von Mises*-Vergleichsspannung für Rundstäbe mit Umlaufkerbe unter Zugbelastung

| Werkstoffstrukturlänge $\rho^* = 0,1mm, d = 40mm, D = 48mm$ | | | | | | | | | | |
|---|--------------------|-----------|--------------------|-----------|---------------|----------------|-----------|-------|-------------------|---------------|
| | Gradientenkonzept | | | | | Volumenkonzept | | | | Hahn [21] |
| ρ | $\chi_{\hat{I}_1}$ | $n_{G,1}$ | $\chi_{\hat{I}_2}$ | $n_{G,2}$ | $n_{G,Mises}$ | $n_{V,1}$ | $n_{V,2}$ | K^2 | $n_{V,mod.Mises}$ | $n_{H,Mises}$ |
| 8 | 0,165 | 1,008 | 0,227 | 1,011 | 1,010 | 1,002 | 0,998 | 2,193 | 1,002 | 1,012 |
| 4 | 0,308 | 1,015 | 0,397 | 1,020 | 1,020 | 1,019 | 0,988 | 2,221 | 1,017 | 1,025 |
| 2 | 0,570 | 1,028 | 0,770 | 1,038 | 1,037 | 1,040 | 0,979 | 2,240 | 1,037 | 1,049 |
| 1,5 | 0,735 | 1,036 | 1,027 | 1,050 | 1,047 | 1,056 | 0,972 | 2,246 | 1,053 | 1,065 |
| 1 | 1,062 | 1,052 | 1,564 | 1,075 | 1,066 | 1,081 | 0,965 | 2,253 | 1,077 | 1,095 |
| 0,5 | 1,984 | 1,095 | 3,195 | 1,149 | 1,118 | 1,161 | 0,959 | 2,260 | 1,151 | 1,183 |
| 0,25 | 3,852 | 1,177 | 6,679 | 1,291 | 1,221 | 1,329 | 0,996 | 2,265 | 1,289 | 1,342 |
| 0,11 | 8,405 | 1,357 | 15,18 | 1,587 | 1,480 | 1,856 | 1,243 | 2,268 | 1,628 | 1,679 |

| Werkstoffstrukturlänge $\rho^* = 0,05mm, d = 40mm, D = 48mm$ | | | | | | | | | | |
|--|--------------------|-----------|--------------------|-----------|---------------|----------------|-----------|-------|-------------------|---------------|
| | Gradientenkonzept | | | | | Volumenkonzept | | | | Hahn [21] |
| ρ | $\chi_{\hat{I}_1}$ | $n_{G,1}$ | $\chi_{\hat{I}_2}$ | $n_{G,2}$ | $n_{G,Mises}$ | $n_{V,1}$ | $n_{V,2}$ | K^2 | $n_{V,mod.Mises}$ | $n_{H,Mises}$ |
| 8 | 0,165 | 1,004 | 0,227 | 1,006 | 1,005 | 1,000 | 1,000 | 2,193 | 1,000 | 1,006 |
| 4 | 0,308 | 1,008 | 0,397 | 1,010 | 1,010 | 1,000 | 1,000 | 2,221 | 1,000 | 1,012 |
| 2 | 0,570 | 1,014 | 0,770 | 1,019 | 1,018 | 1,018 | 0,989 | 2,240 | 1,017 | 1,025 |
| 1,5 | 0,735 | 1,018 | 1,027 | 1,025 | 1,023 | 1,026 | 0,984 | 2,246 | 1,025 | 1,033 |
| 1 | 1,062 | 1,026 | 1,564 | 1,038 | 1,033 | 1,037 | 0,978 | 2,253 | 1,037 | 1,049 |
| 0,5 | 1,984 | 1,048 | 3,195 | 1,077 | 1,059 | 1,077 | 0,962 | 2,260 | 1,076 | 1,095 |
| 0,25 | 3,852 | 1,092 | 6,679 | 1,155 | 1,110 | 1,153 | 0,954 | 2,265 | 1,148 | 1,183 |
| 0,11 | 8,405 | 1,192 | 15,18 | 1,326 | 1,236 | 1,363 | 1,003 | 2,268 | 1,320 | 1,382 |

| Werkstoffstrukturlänge $\rho^* = 0,026mm, d = 40mm, D = 48mm$ | | | | | | | | | | |
|---|--------------------|-----------|--------------------|-----------|---------------|----------------|-----------|-------|-------------------|---------------|
| | Gradientenkonzept | | | | | Volumenkonzept | | | | Hahn [21] |
| ρ | $\chi_{\hat{I}_1}$ | $n_{G,1}$ | $\chi_{\hat{I}_2}$ | $n_{G,2}$ | $n_{G,Mises}$ | $n_{V,1}$ | $n_{V,2}$ | K^2 | $n_{V,mod.Mises}$ | $n_{H,Mises}$ |
| 8 | 0,165 | 1,002 | 0,227 | 1,003 | 1,003 | 1,000 | 1,000 | 2,193 | 1,000 | 1,003 |
| 4 | 0,308 | 1,004 | 0,397 | 1,005 | 1,005 | 1,000 | 1,000 | 2,221 | 1,000 | 1,006 |
| 2 | 0,570 | 1,007 | 0,770 | 1,010 | 1,010 | 1,007 | 0,996 | 2,240 | 1,006 | 1,013 |
| 1,5 | 0,735 | 1,010 | 1,027 | 1,013 | 1,012 | 1,010 | 0,993 | 2,246 | 1,010 | 1,017 |
| 1 | 1,062 | 1,014 | 1,564 | 1,020 | 1,017 | 1,018 | 0,988 | 2,253 | 1,018 | 1,026 |
| 0,5 | 1,984 | 1,025 | 3,195 | 1,040 | 1,031 | 1,038 | 0,976 | 2,260 | 1,038 | 1,051 |
| 0,25 | 3,852 | 1,049 | 6,679 | 1,083 | 1,057 | 1,076 | 0,959 | 2,265 | 1,077 | 1,099 |
| 0,11 | 8,405 | 1,104 | 15,18 | 1,181 | 1,122 | 1,176 | 0,951 | 2,268 | 1,171 | 1,214 |

Tabelle C.3: Mikrostützziffer $n_{V,12a}$ eines Rundstabs mit Umlaufkerbe unter überlagerter Zug-Druck- und Torsionsbelastung für verschiedene Nennspannungsverhältnisse T/S , Werkstoffstrukturlängen ρ^* , Kerbradien ρ und Phasenverschiebungen δ_{xy} ^a

| T/S | ρ^* | ρ | δ_{xy} | $n_{V,12a}$ | $n_{H,3a}^2$ [21] |
|-------|----------|--------|---------------|-------------|-------------------|
| 0,58 | 0,052 | 1 | 10 | 1,107 | 1,080 |
| 0,58 | 0,052 | 1 | 30 | 1,107 | 1,080 |
| 0,58 | 0,052 | 1 | 90 | 1,102 | 1,080 |
| 0,58 | 0,052 | 0,5 | 10 | 1,246 | 1,159 |
| 0,58 | 0,052 | 0,5 | 30 | 1,253 | 1,159 |
| 0,58 | 0,052 | 0,5 | 90 | 1,247 | 1,159 |
| 0,58 | 0,052 | 0,25 | 10 | 1,628 | 1,317 |
| 0,58 | 0,052 | 0,25 | 30 | 1,627 | 1,317 |
| 0,58 | 0,052 | 0,25 | 90 | 1,625 | 1,317 |
| 0,58 | 0,052 | 0,125 | 10 | 2,352 | 1,630 |
| 0,58 | 0,052 | 0,125 | 30 | 2,351 | 1,630 |
| 0,58 | 0,052 | 0,125 | 90 | 2,348 | 1,630 |
| 1 | 0,052 | 1 | 10 | 1,102 | 1,080 |
| 1 | 0,052 | 1 | 30 | 1,102 | 1,080 |
| 1 | 0,052 | 1 | 90 | 1,102 | 1,080 |
| 1 | 0,052 | 0,125 | 10 | 2,348 | 1,630 |
| 1 | 0,052 | 0,125 | 30 | 2,348 | 1,630 |
| 1 | 0,052 | 0,125 | 90 | 2,348 | 1,630 |
| 1 | 0,17 | 1 | 10 | 1,466 | 1,260 |
| 1 | 0,17 | 1 | 30 | 1,466 | 1,260 |
| 1 | 0,17 | 1 | 90 | 1,466 | 1,260 |
| 1 | 0,17 | 0,125 | 10 | 4,177 | 3,033 |
| 1 | 0,17 | 0,125 | 30 | 4,177 | 3,033 |
| 1 | 0,17 | 0,125 | 90 | 4,177 | 3,033 |

^aDie Kerbspannungen sind jeweils für eine Randnennspannung $S = 100 \text{ N/mm}^2$ und $T = 100 \text{ N/mm}^2$ berechnet.

Kerbgeometrie: $\rho = 1\text{mm}$, $d = 24\text{mm}$, $D = 40\text{mm}$; $\rho = 0,5\text{mm}$, $d = 12\text{mm}$, $D = 20\text{mm}$; $\rho = 0,25\text{mm}$, $d = 6\text{mm}$, $D = 10\text{mm}$; $\rho = 0,125\text{mm}$, $d = 3\text{mm}$, $D = 5\text{mm}$

Tabelle C.4: Mikrostützziffer $n_{V,12a}$ eines glatten Rundstabs unter überlagerter Zug-Druck-, Biege- und Torsionsbelastung für ein Nennspannungsverhältnis $T/S_{Biegung} = 1$ und eine Werkstoffstrukturlänge $\rho^* = 0,17mm$ sowie verschiedene Spannungsverhältnisse $S_{Zug}/S_{Biegung}$ und Phasenverschiebungen δ_{xy} und $\delta_{xx,Zug}$ ^a

| $S_{Zug}/S_{Biegung}$ | δ_{xy} | $\delta_{xx,Zug}$ | $n_{V,12a}$ | $n_{H,3a}^2$ [21] |
|-----------------------|---------------|-------------------|-------------|-------------------|
| 0 | 10 | 0 | 1,026 | 1,025 |
| 0 | 30 | 0 | 1,026 | 1,025 |
| 0,5 | 10 | 10 | 1,026 | 1,020 |
| 0,5 | 10 | 50 | 0,998 | 1,020 |
| 0,5 | 10 | 90 | 1,006 | 1,020 |
| 1 | 10 | 10 | 1,026 | 1,017 |
| 1 | 10 | 50 | 1,008 | 1,017 |
| 1 | 10 | 90 | 1,010 | 1,017 |
| 1 | 30 | 10 | 1,021 | 1,017 |
| 1 | 30 | 50 | 1,056 | 1,017 |
| 1 | 30 | 90 | 0,995 | 1,017 |

^aDie Kerbspannungen sind jeweils für eine Randnennspannung $S_{Zug} = 100 \text{ N/mm}^2$, $S_{Biegung} = 100 \text{ N/mm}^2$ und $T = 100 \text{ N/mm}^2$ berechnet.
Stabdurchmesser: $d = 10mm$

Tabelle C.5: Mikrostützziffer $n_{V,12a}$ eines gekerbten Rundstabs unter überlagerter Zug-Druck-, Biege- und Torsionsbelastung für ein Spannungsverhältnis $T/S_{Biegung} = 1$ und eine Werkstoffstrukturlänge $\rho^* = 0,20mm$ sowie verschiedene Spannungsverhältnisse $S_{Zug}/S_{Biegung}$ und Phasenverschiebungen δ_{xy} und $\delta_{xx,Zug}$ ^a

| $S_{Zug}/S_{Biegung}$ | δ_{xy} | $\delta_{xx,Zug}$ | $n_{V,12a}$ | $n_{H,3a}^2$ [21] |
|-----------------------|---------------|-------------------|-------------|-------------------|
| 0 | 10 | 0 | 3,675 | 2,298 |
| 0 | 30 | 0 | 3,675 | 2,298 |
| 0 | 90 | 0 | 3,675 | 2,298 |
| 0,5 | 10 | 10 | 4,159 | 2,277 |
| 0,5 | 10 | 50 | 2,543 | 2,277 |
| 0,5 | 10 | 90 | 2,946 | 2,277 |
| 1 | 10 | 10 | 4,734 | 2,267 |
| 1 | 10 | 50 | 2,914 | 2,267 |
| 1 | 10 | 90 | 3,116 | 2,267 |
| 0,5 | 30 | 10 | 4,057 | 2,277 |
| 0,5 | 30 | 50 | 3,937 | 2,277 |
| 0,5 | 30 | 90 | 0,169 | 2,277 |
| 1 | 90 | 10 | 4,085 | 2,267 |
| 1 | 90 | 50 | 4,528 | 2,267 |
| 1 | 90 | 90 | 4,734 | 2,267 |

^aDie Kerbspannungen sind jeweils für eine Randnennspannung $S_{Zug} = 100 \text{ N/mm}^2$, $S_{Biegung} = 100 \text{ N/mm}^2$ und $T = 100 \text{ N/mm}^2$ berechnet.
Kerbgeometrie: $\rho = 0,25mm$, $d = 3mm$, $D = 3,5mm$

Tabelle C.6: Mikrostützziffern eines gekerbten Rundstabs unter überlagerter Zug-Druck-, Biege- und Torsionsbelastung für eine Werkstoffstrukturlänge $\rho^* = 0,20mm$ sowie verschiedene Kerbradien, Spannungsverhältnisse und Phasenverschiebungen^a

| ρ | $S_{Zug}/S_{Biegung}$ | T/S_{Zug} | $\delta_{xx,Zug}$ | δ_{xy} | $n_{V,mod.Mises}$ | $n_{H,Mises}$ [21] |
|--------|-----------------------|-------------|-------------------|---------------|-------------------|--------------------|
| 0,25 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1,627 | 1,631 |
| 0,25 | 1 | 0 | 90 | 0 | 1,624 | 1,629 |
| 0,5 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1,295 | 1,353 |
| 0,5 | 1 | 0 | 90 | 0 | 1,295 | 1,352 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1,138 | 1,190 |
| 1 | 1 | 0 | 90 | 0 | 1,138 | 1,189 |
| 0,25 | 3 | 0 | 0 | 0 | 1,609 | 1,621 |
| 0,25 | 3 | 0 | 90 | 0 | 1,592 | 1,615 |
| 0,5 | 3 | 0 | 0 | 0 | 1,291 | 1,347 |
| 0,5 | 3 | 0 | 90 | 0 | 1,285 | 1,343 |
| 1 | 3 | 0 | 0 | 0 | 1,139 | 1,186 |
| 1 | 3 | 0 | 90 | 0 | 1,139 | 1,184 |
| 0,25 | - | 0,58 | 0 | 0 | 1,621 | 1,541 |
| 0,25 | - | 0,58 | 0 | 30 | 1,623 | 1,547 |
| 0,5 | - | 0,58 | 0 | 0 | 1,316 | 1,301 |
| 0,5 | - | 0,58 | 0 | 30 | 1,315 | 1,305 |
| 1 | - | 0,58 | 0 | 0 | 1,158 | 1,162 |
| 1 | - | 0,58 | 0 | 30 | 1,158 | 1,164 |
| 0,25 | - | 1 | 0 | 0 | 1,586 | 1,482 |
| 0,25 | - | 1 | 0 | 30 | 1,591 | 1,481 |
| 0,5 | - | 1 | 0 | 0 | 1,305 | 1,267 |
| 0,5 | - | 1 | 0 | 30 | 1,307 | 1,267 |
| 1 | - | 1 | 0 | 0 | 1,154 | 1,143 |
| 1 | - | 1 | 0 | 30 | 1,155 | 1,143 |
| 0,25 | 1 | 0,58 | 0 | 0 | 1,614 | 1,601 |
| 0,25 | 1 | 0,58 | 0 | 60 | 1,625 | 1,621 |
| 0,5 | 1 | 0,58 | 0 | 0 | 1,290 | 1,336 |
| 0,5 | 1 | 0,58 | 0 | 60 | 1,295 | 1,347 |
| 1 | 1 | 0,58 | 0 | 0 | 1,136 | 1,181 |
| 1 | 1 | 0,58 | 0 | 60 | 1,138 | 1,187 |
| 0,25 | 1 | 0,58 | 90 | 0 | 1,607 | 1,600 |
| 0,25 | 1 | 0,58 | 90 | 60 | 1,582 | 1,576 |
| 0,5 | 1 | 0,58 | 90 | 0 | 1,284 | 1,336 |
| 0,5 | 1 | 0,58 | 90 | 60 | 1,271 | 1,322 |
| 1 | 1 | 0,58 | 90 | 0 | 1,133 | 1,181 |
| 1 | 1 | 0,58 | 90 | 60 | 1,126 | 1,173 |

^aDie Kerbspannungen sind jeweils für eine Randnennspannung $S_{Zug} = 100 \text{ N/mm}^2$, $S_{Biegung} = 100 \text{ N/mm}^2$ und $T = 100 \text{ N/mm}^2$ berechnet.

Kerbgeometrie: $\rho = 0,25mm$, $d = 3mm$, $D = 3,5mm$; $\rho = 0,5mm$, $d = 6mm$, $D = 7mm$; $\rho = 1mm$, $d = 12mm$, $D = 14mm$

Tabelle C.7: Mikrostützziffern eines gekerbten Rundstabs unter Zug-Druck-, Biege- und Torsionsbelastung für eine Werkstoffstrukturlänge $\rho^* = 0,20\text{mm}$ sowie verschiedene Kerbradien^a

| | ρ | Volumenkonzept | | | | | Gradientenkonzept nach [21] | | | |
|----------------|--------|----------------|-----------|-------|--------------------|---------|-----------------------------|-------------|--------------------|---------|
| | | $n_{V,1}$ | $n_{V,2}$ | K | $\bar{\sigma}_V^b$ | n_V^c | $n_{H,1}^2$ | $n_{H,2}^2$ | $\bar{\sigma}_H^d$ | n_H^e |
| Z ^f | 0,25 | 2,184 | 1,543 | 2,217 | 146,5 | 1,652 | 2,6 | 1 | 150,2 | 1,612 |
| Z | 0,5 | 1,468 | 1,092 | 2,217 | 182,5 | 1,327 | 1,8 | 1 | 180,5 | 1,342 |
| Z | 1 | 1,207 | 0,985 | 2,217 | 208,1 | 1,164 | 1,4 | 1 | 204,6 | 1,183 |
| B | 0,25 | 2,286 | 1,604 | 2,202 | 119,9 | 1,678 | 2,733 | 1 | 121,7 | 1,653 |
| B | 0,5 | 1,485 | 1,111 | 2,202 | 152,3 | 1,321 | 1,933 | 1 | 144,7 | 1,390 |
| B | 1 | 1,198 | 0,998 | 2,202 | 175,5 | 1,147 | 1,533 | 1 | 162,5 | 1,238 |
| T | 0,25 | 1 | 1,797 | 3 | 192,2 | 1,341 | 1 | 1,933 | 185,3 | 1,390 |
| T | 0,5 | 1 | 1,343 | 3 | 222,3 | 1,159 | 1 | 1,533 | 208,1 | 1,238 |
| T | 1 | 1 | 1,154 | 3 | 239,8 | 1,074 | 1 | 1,333 | 223,1 | 1,155 |

^aDie Kerbspannungen sind jeweils für eine Randnennspannung $S_{Zug} = 100\text{ N/mm}^2$, $S_{Biegung} = 100\text{ N/mm}^2$ und $T = 100\text{ N/mm}^2$ berechnet.

Kerbgeometrie: $\rho = 0,25\text{mm}$, $d = 3\text{mm}$, $D = 3,5\text{mm}$; $\rho = 0,5\text{mm}$, $d = 6\text{mm}$, $D = 7\text{mm}$; $\rho = 1\text{mm}$, $d = 12\text{mm}$, $D = 14\text{mm}$

^b $\bar{\sigma}_V, \text{mod. Mises}$

^c $n_V, \text{mod. Mises}$

^d $\bar{\sigma}_H, \text{Mises}$

^e n_H, Mises

^fBelastungsart: Z=Zug, B=Biegung, T=Torsion

D Beispiele der Bauteilelementierung

In den folgenden Abbildungen ist die Bauteilelementierung beispielhaft für verschiedene Kerbgeometrien dargestellt. **Abbildung D.1** zeigt das ganze FEM-Modell für die Nachrechnung der Versuchsergebnisse von *Pötter* und *Zenner* [50] mit der Kerbgeometrie: $\rho = 2\text{mm}$, $d = 22\text{mm}$, $D = 25\text{mm}$. Die beiden Belastungen Biegung und Torsion werden auf der einen Stirnfläche über eine Shell aufgebracht, während die andere Stirnfläche mit Constraints fest eingespannt wird. Die Elementierung ist am Rand recht grob und verfeinert sich zur Kerbe hin. **Abbildung D.2** zeigt einen Detailausschnitt. Um den Punkt der höchsten Biegebeanspruchung herum ist die Elementierung sehr fein, um die elastizitätstheoretische Spannungsspitze mit einer ausreichenden Güte bestimmen und die Mikrostützziffern mit dem Volumenkonzept berechnen zu können (s.a. **Abbildung D.3**).

Der von *Simburger* [57] verwendete abgesetzte Rundstab mit der Kerbgeometrie $\rho = 5\text{mm}$, $d = 25\text{mm}$ und $D = 39\text{mm}$ ist in **Abbildung D.4** dargestellt. Auch hier werden die beiden Belastungen Biegung und Torsion auf einer Stirnfläche über eine Shell aufgebracht und die Freiheitsgrade durch Einspannen –Behinderung aller sechs Freiheitsgrade– der anderen Stirnfläche genommen. Die Elementierung wird ebenfalls von den Stirnflächen zur Kerbe hin feiner. Da der Kerbradius relativ groß ist, kann ohne Einbuße der Güte der FEM-Berechnung auf eine sehr feine Elementierung in der Nähe des Versagensortes verzichtet werden.

Die beiden beschriebenen Kerbstäbe erforderten von Seiten des FEM-Programms eine Elementierung des gesamten Stabes mit 3D-Volumenelementen. In **Abbildung D.5** ist die Bauteilelementierung mit rotationssymmetrischen 2D-Elementen für einen von *Liebrich* [34] verwendeten gekerbten Rundstab – $\rho = 8\text{mm}$, $d = 12\text{mm}$ und $D = 24\text{mm}$ – unter reiner Zugbelastung dargestellt. Durch Ausnutzen der Symmetrie der Geometrie und der Belastung muß nur ein Viertel des Stabes elementiert werden. Im Gegensatz zu den beiden anderen Beispielen wird die Zugbelastung direkt als Nennspannungsverteilung auf der einen Stirnkante aufgebracht. Die Stirnkante im Kerbgrund wird axial gebunden. Um eine Translation des gesamten Modells in radialer Richtung zu verhindern, wird außerdem der auf der Rotationsachse befindliche FEM-Knoten in radialer Richtung gebunden.

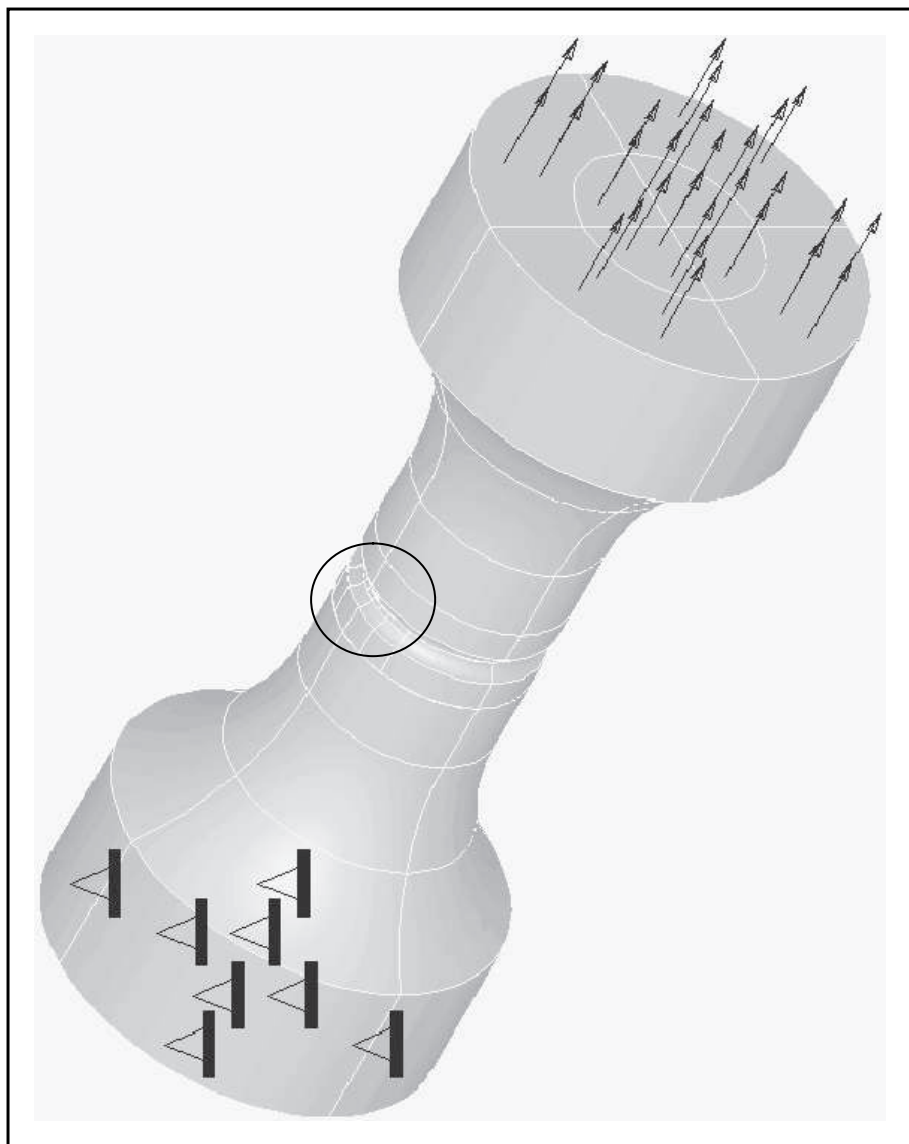


Abbildung D.1: Bauteilelementierung eines Rundstabes mit der Geometrie nach *Pötter* und *Zenner* [50]

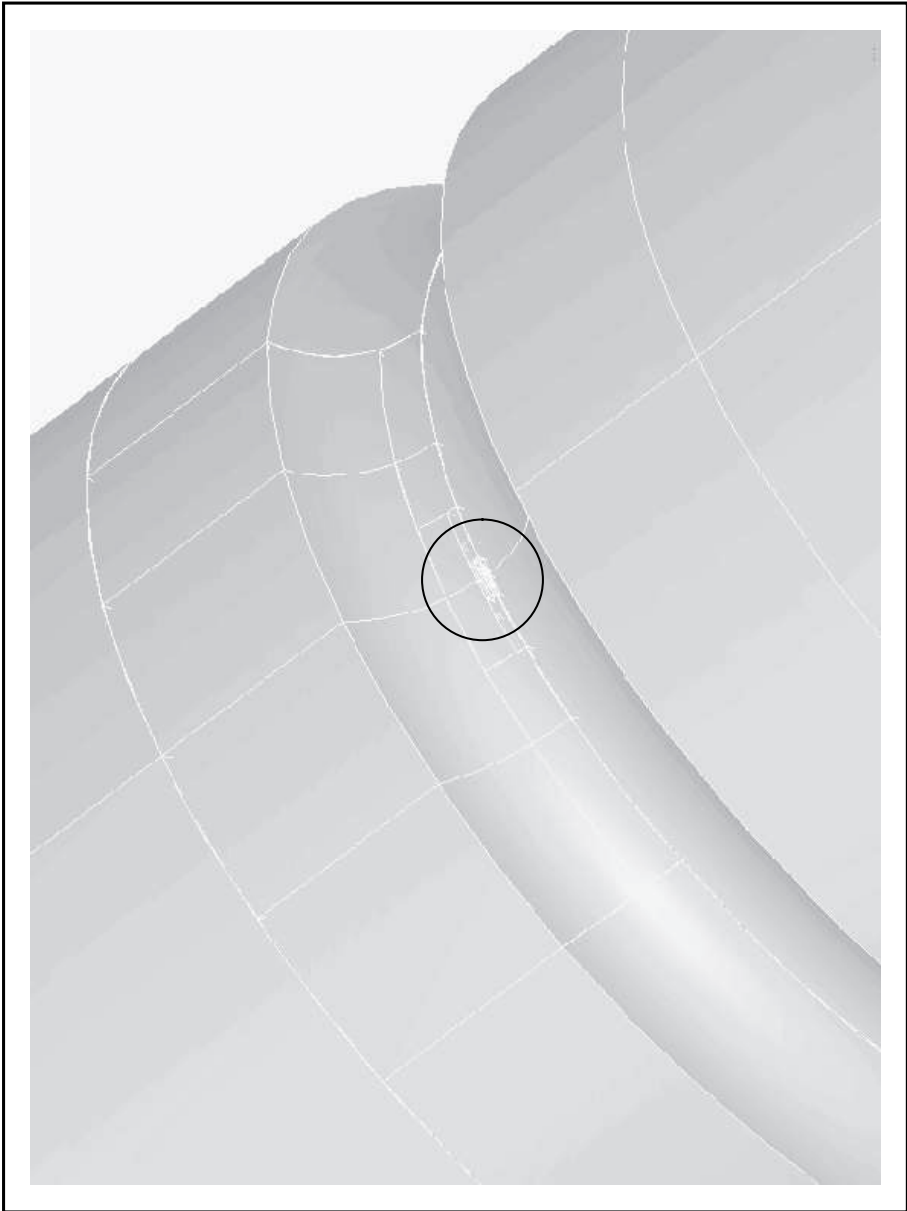


Abbildung D.2: Detailausschnitt der Bauteilelementierung eines Rundstabes mit der Geometrie nach *Pötter* und *Zenner* [50]

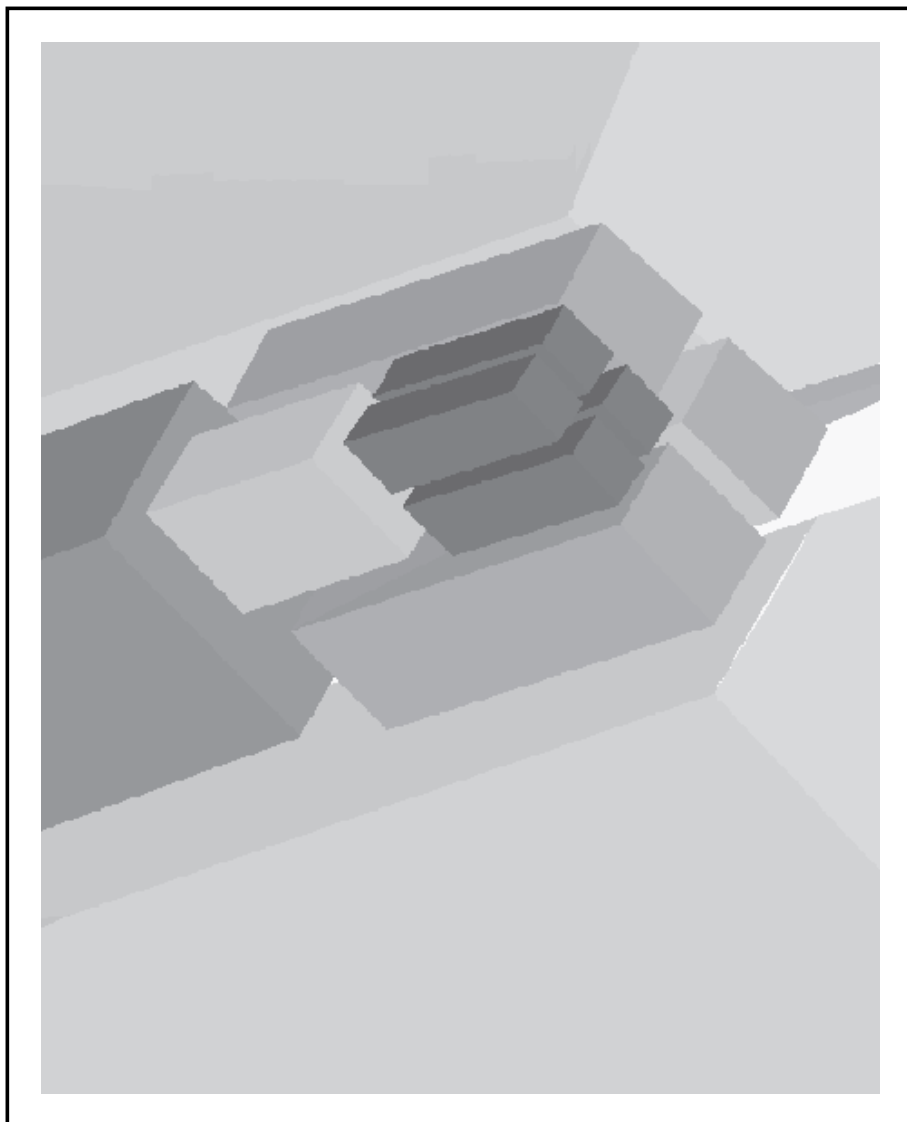


Abbildung D.3: Detailausschnitt der Bauteilelementierung am Punkt der höchsten Beanspruchung (Geometrie nach *Pötter* und *Zenner* [50])

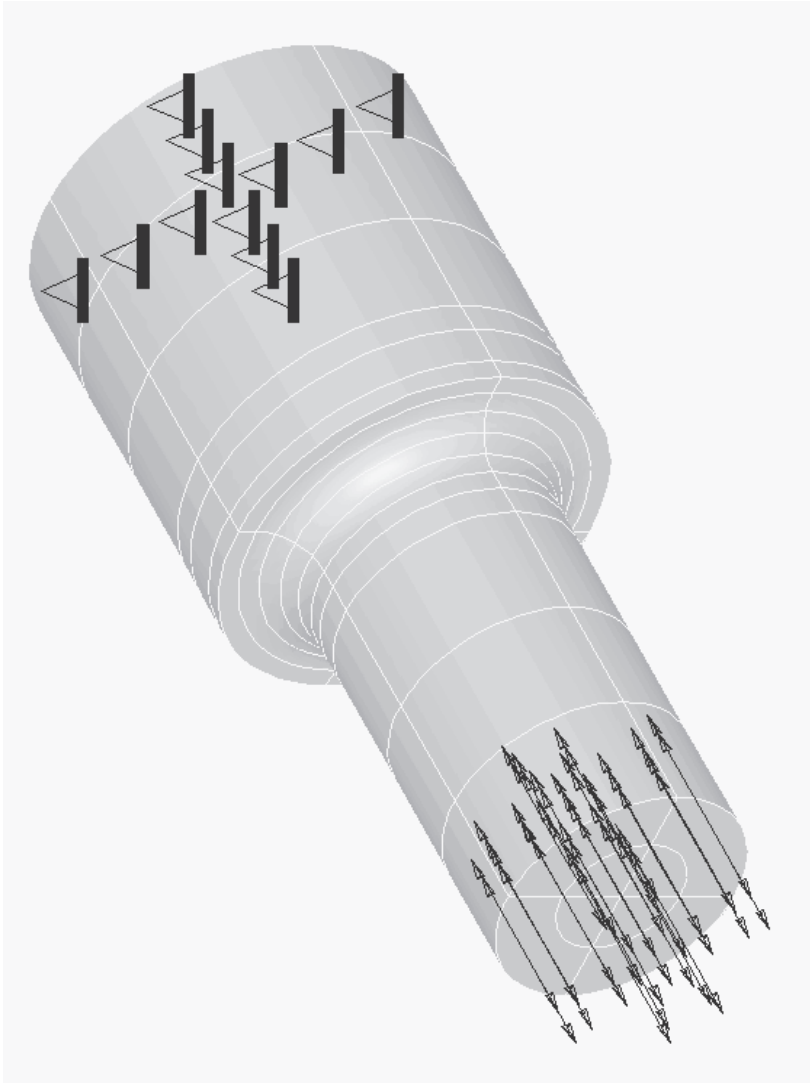


Abbildung D.4: Bauteilelementierung eines Rundstabes mit der Geometrie nach *Simburger* [57]

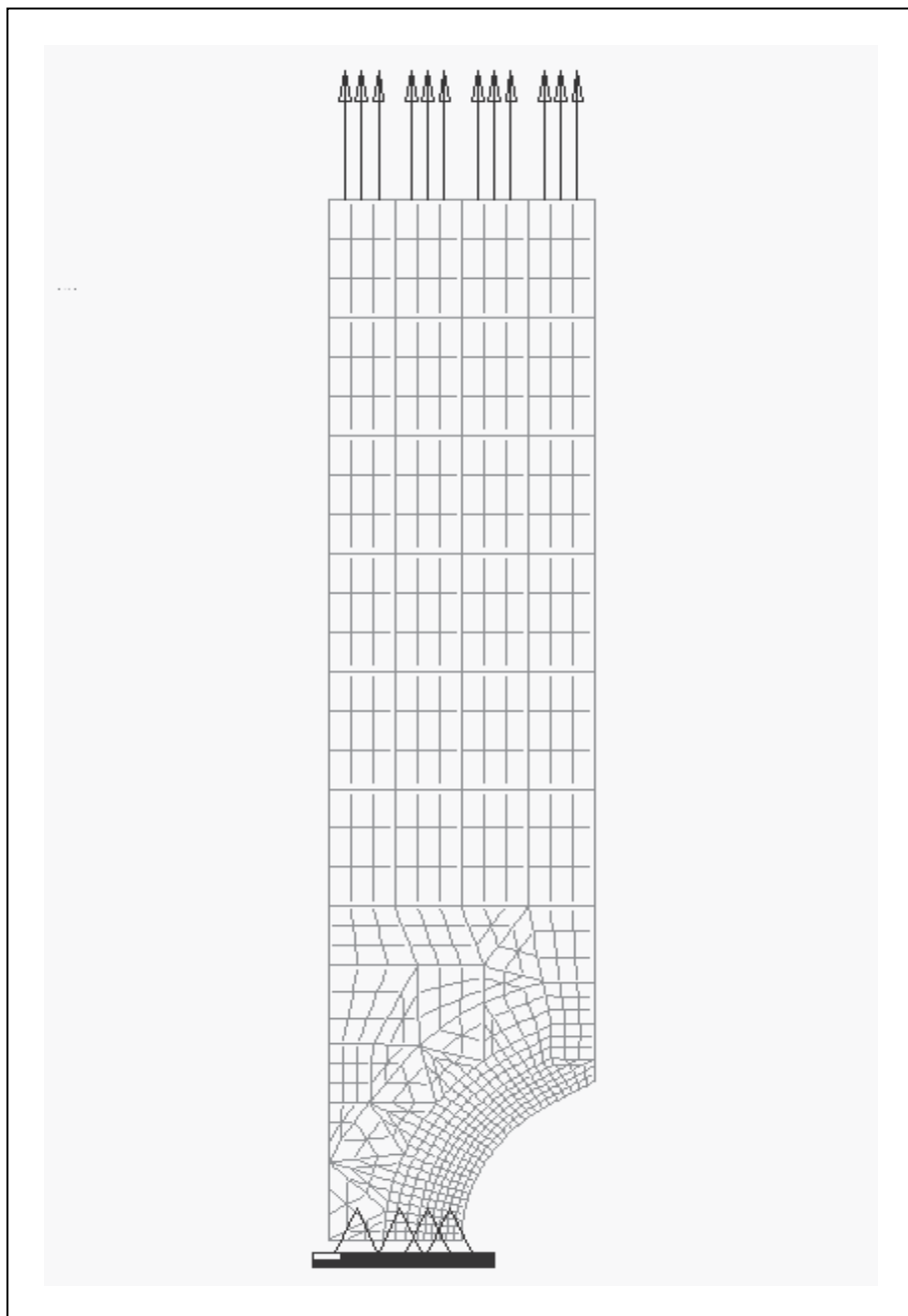


Abbildung D.5: Bauteilelementierung eines Rundstabes mit der Geometrie nach *Liebrich* [34]

E Dauerfestigkeits-Hypothesen

Neben den klassischen Festigkeitshypothesen (MH, NSH, SSH) wurden in der Vergangenheit eine Mehrzahl anderer Hypothesen zur Dauerfestigkeitsberechnung formuliert. Sie lassen sich gemäß ihrer physikalischen Grundlagen grob in solche der integralen Anstrengung und solche der kritischen Schnittebene bzw. Orientierung unterteilen.

E.1 Schubspannungs-Intensitäts-Hypothese

Die Schubspannungs-Intensitäts-Hypothese (SIH) ist eine Festigkeitshypothese der integralen Anstrengung. Sie wurde erstmals von *Zenner* und *Richter* [69] veröffentlicht und ist seitdem mehrfach modifiziert worden [27, 35]. Ihr liegt aufbauend auf den Erkenntnissen von *Novozhilov* [49] die Annahme zu grunde, daß der quadratische Mittelwert der sogenannten effektiven Schubspannungsamplitude aller Schnittebenen des Volumenelements eine geeignete einachsige Vergleichsspannung liefert:

$$\sigma_{va} = \sqrt{\frac{15}{8 \cdot \pi} \cdot \int_{\gamma=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \tau_{\gamma\varphi,eff,a}^2 \cdot \sin \gamma \, d\varphi \, d\gamma} \quad . \quad (E.1)$$

Liu [35] gibt für die effektive Schubspannungsamplitude folgende Beziehung an:

$$\begin{aligned} \tau_{\gamma\varphi,eff,a}^2 &= a \cdot \tau_{\gamma\varphi a}^2 \cdot (1 + m \cdot \tau_{\gamma\varphi m}^2) + \\ &b \cdot \sigma_{\gamma\varphi a}^2 \cdot (1 + n \cdot \sigma_{\gamma\varphi m}^2) \quad . \end{aligned} \quad (E.2)$$

Bauteilversagen tritt ein, wenn diese Vergleichsspannung größer ist als die Zug-Druck-Wechselfestigkeit. Die verwendeten Parameter a , b , m und n werden den Randbedingungen bei den Beanspruchungsfällen Zug-Druck-Wechselbeanspruchung σ_W , Zugschwellbeanspruchung σ_{schw} , Torsionswechselbeanspruchung τ_W und Torsionsschwellbeanspruchung τ_{schw}

$$a = \frac{1}{5} \cdot \left[3 \cdot \left(\frac{\sigma_W}{\tau_W} \right)^2 - 4 \right] \quad b = \frac{1}{5} \cdot \left[6 - 2 \cdot \left(\frac{\sigma_W}{\tau_W} \right)^2 \right]$$

$$a \cdot m = \frac{\sigma_W^2 - \left(\frac{\sigma_W}{\tau_W} \right)^2 \cdot \left(\frac{\tau_{schw}}{2} \right)^2}{\frac{7}{12} \cdot \left(\frac{\tau_{schw}}{2} \right)^4}$$

$$b \cdot n = \frac{\sigma_W^2 - \left(\frac{\sigma_W}{2}\right)^2 - \frac{4}{21} \cdot a \cdot m \cdot \left(\frac{\sigma_{schw}}{2}\right)^4}{\frac{15}{14} \cdot \left(\frac{\sigma_{schw}}{2}\right)^3} \quad (\text{E.3})$$

angefaßt.

Die Normalspannungs- und die Schubspannungskomponenten in einer um die Winkel φ und γ gedrehten Schnittebene können entsprechend Gl.(2.32)

$$\begin{aligned} \sigma_{\gamma\varphi} &= \sigma_{rr} \\ \tau_{\gamma\varphi,\varphi} &= \sigma_{r\varphi} \\ \tau_{\gamma\varphi,\gamma} &= \sigma_{r\gamma} \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

angegeben werden, wobei die resultierende Schubspannung zu

$$\tau_{\gamma\varphi a} = \sqrt{\tau_{\gamma\varphi,\varphi}^2 + \tau_{\gamma\varphi,\gamma}^2} \quad (\text{E.5})$$

zusammengefaßt wird.

Setzt man in die Gl.(E.4) und (E.5) die entsprechenden Mittelspannungskomponenten ein, erhält man direkt die in der Schnittebene vorhandene Normal- und Schubmittelspannung $\sigma_{\gamma\varphi m}$ und $\tau_{\gamma\varphi m}$. Die Normalspannungsamplitude folgt demgegenüber aus der Schwingbreite der Normalspannungs-Zeitfunktion

$$\sigma_{\gamma\varphi a} = \frac{\max[\sigma_{\gamma\varphi a}(t)] - \min[\sigma_{\gamma\varphi a}(t)]}{2}, \quad (\text{E.6})$$

während die Schubspannungsamplitude nicht direkt aus der Schubspannungs-Zeitfunktion bestimmt werden kann, da die Ortskurve eine beliebige Form hat. Die Schubspannung wird deshalb jeweils für eine Periode auf einen Vektor projiziert, der den Winkel Ω mit der φ -Achse einschließt. Der Winkel wird zwischen 0° und 180° variiert. Als Schubspannungsamplitude wird das Maximum der projizierten Schwingbreite definiert:

$$\begin{aligned} \tau_{\gamma\varphi a} &= \max [(\tau_{\gamma\varphi a})_\Omega] \\ &= \max \left[\left(\left| \frac{\max[\tau_{\gamma\varphi a}(t)] - \min[\tau_{\gamma\varphi a}(t)]}{2} \right| \right)_\Omega \right] \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

Liu [35] unterteilt die verschiedenen Werkstoffe in „rißfreie“ Werkstoffe und solche mit rißähnlichen Fehlern, wie zum Beispiel Grauguß mit Lamellengraphit. Der Anwendungsbereich der SIH beschränkt sich auf rißfreie Werkstoffe mit einem in [70] festgelegten Wechselfestigkeitsverhältnis $0,5 < \frac{\tau_W}{\sigma_W} < 0,83$, während Werkstoffe mit rißähnlichen Fehlern nach der Normalspannungshypothese berechnet werden [35].

E.2 Quadratische Versagens-Hypothese

Die Quadratische Versagens-Hypothese (QVH) ist eine Hypothese der kritischen Orientierung. Ausgehend von der Annahme eines sogenannten mittelspannungsinduzierten anisotropen Festigkeitsverhaltens isotroper Werkstoffe durch *Troost* und *El-Magd* [63] wurde zunächst die quadratische Versagensbedingung von *El-Magd* [12] und *Mielke* [44] formuliert, die später durch *Kaniut* [29] modifiziert wurde.

Ausgangspunkt seiner Hypothese ist das sogenannte quadratische Potential:

$$F = \underline{\sigma} \cdot \underline{\underline{\mathbf{P}}} \cdot \underline{\sigma}^T \quad . \quad (\text{E.8})$$

Die Potentialfaktoren

$$P_{ij} = R_{ij}(\vartheta) \cdot Z_{ij}(\omega t) \quad (\text{E.9})$$

sind über die Richtungsfaktoren R_{ij} abhängig vom Winkel ϑ , um den das Koordinatensystem gedreht wurde, und über die Zeitfaktoren Z_{ij} abhängig von der Zeit.

Bauteilversagen tritt für den Fall ein, daß der Versagenswert F_V gleich eins ist. F_V setzt sich aus einer linearen Kombination des maximalen Spitzenwertes

$$\tilde{F}_{max} = \max [F(\vartheta, \omega t)]_{(\vartheta, \omega t)} \quad (\text{E.10})$$

und des maximalen Integrationswertes

$$\bar{F}_{max} = \max \left[\int F(\vartheta, \omega t) \, d\omega t \right]_{(\vartheta)} \quad (\text{E.11})$$

zusammen:

$$F_V = \tilde{F}_{max} \cdot \cos^2 \psi_c + \bar{F}_{max} \cdot \sin^2 \psi_c \quad . \quad (\text{E.12})$$

Der Winkel

$$\psi_c = \arctan \left(2 \cdot \frac{|\tau_{xym}| + \left(1 + 3 \cdot \frac{\sigma_{ya}}{\sigma_{xa}} \right) \cdot \tau_{xya}}{|\sigma_{xm} - \sigma_{ym}| + \sigma_{xa} + \sigma_{ya}} \right) \quad (\text{E.13})$$

wird als charakteristische Hauptrichtung bezeichnet. Er wurde durch Anpassung der QVH an Versuchsergebnisse mit einem zweiachsigen Beanspruchungszustand definiert.

E Nomenklatur

Spezielle Kennzeichnung verwendeter Formelzeichen

| Zeichen | Bedeutung |
|----------------------------|--|
| $\hat{}$ | elastizitätstheoretisch berechnete Größen z.B. \hat{I} |
| $\bar{}$ | elastisch gestützte Größen z.B. \bar{I} |
| $\check{}$ | unteres Spannungsniveau z.B. $\check{\sigma}$ |
| z.B. $\underline{\hat{I}}$ | Mittelwert der elastizitätstheoretisch berechneten Größe \hat{I} im Teilvolumen ΔV |

Verwendete Formelzeichen

| Zeichen | Einheit | Bedeutung |
|-----------------------------|--------------|---|
| $A, A_{\#}$ | N/mm^2 | Anstrengungsfunktionen |
| a | N/mm^2 | Amplitude |
| a | - | Parameter der SIH |
| a | - | Durchmesserverhältnis |
| B | N/mm^2 | Amplitude |
| B, b | mm | Breite |
| b | $(N/mm^2)^2$ | Quadratische Ausschlagspannungskombination |
| b | - | Parameter der SIH |
| b | - | Parameter im <i>Haigh</i> -Schaubild |
| b | - | Exponent der elastischen Dehnungs-Wöhlerlinie |
| c | - | Exponent der plastischen Dehnungs-Wöhlerlinie |
| c | $(N/mm^2)^2$ | Quadratische Ausschlagspannungskombination |
| $\underline{\underline{D}}$ | - | Drehtensor |
| \bar{D}, d | mm | Durchmesser |
| E | N/mm^2 | Elastizitätsmodul |
| \underline{e}_i | mm | Einheitsvektoren |
| e^* | - | plastische Nenndehnung |
| F | $(N/mm^2)^2$ | quadratisches Potential (QVH) |
| \tilde{F}_{max} | $(N/mm^2)^2$ | maximaler Spitzenwert (QVH) |
| \bar{F}_{max} | $(N/mm^2)^2$ | maximaler Integrationswert (QVH) |
| F_V | $(N/mm^2)^2$ | Versagenswert (QVH) |
| G | $(N/mm^2)^2$ | Gütefunktion |
| G | % | Güte der FEM-Berechnung in % |
| \bar{G} | mm^{-1} | bezogenes Spannungsgefälle nach TGL 19340 |
| H, h | mm | Höhe |

| Zeichen | Einheit | Bedeutung |
|--|--------------------------|--|
| H_1, H_2 $I_{1a}, I_{1m}, I_1,$ I_{1o} | $(N/mm^2)^2$ N/mm^2 | Spannungskombinationen der Phasenfunktion 1. Invariante des Spannungstensors gebildet mit den Ausschlagspannungs-, den Mittelspannungs- bzw. den zusammengesetzten Spannungskomponenten |
| $I_{2a}, I_{2m}, I_2,$ I_{2o} | $(N/mm^2)^2$ | 2. Invariante des Spannungstensors gebildet mit den Ausschlagspannungs-, den Mittelspannungs- bzw. den zusammengesetzten Spannungskomponenten |
| $I_{3a}, I_{3m}, I_3,$ I_{3o} | $(N/mm^2)^3$ | 3. Invariante des Spannungstensors gebildet mit den Ausschlagspannungs-, den Mittelspannungs- bzw. den zusammengesetzten Spannungskomponenten |
| $J_{1a}, J_{2a},$ J_{12a}, J_{3a} | $(N/mm^2)^2$ | Invarianten mit phasenverschobenen Ausschlagspannungskomponenten |
| $J_{1a,\lambda}, J_{2a,\lambda},$ $J_{12a,\lambda}$ | $(N/mm^2)^2$ | Invarianten mit phasenverschobenen Ausschlagspannungskomponenten in einer Frequenz λ |
| J_{4a}, J_{5a} | $(N/mm^2)^4$ | Invarianten mit phasenverschobenen Ausschlagspannungskomponenten |
| K | - | angepaßter Wert des Wechselfestigkeitsverhältnisses k_a^2 |
| K' | N/mm^2 | zyklischer Festigkeitskoeffizient |
| $k, k', k_k, k_Q,$ k_{90° k_a, k_{aN} | - | Wöhlerlinenexponenten |
| k_b, k_{bN} | - | Wechselfestigkeitsverhältnisse bei Dauer- und Zeitfestigkeit |
| M, M_N | - | Gewichtungsfaktoren bei Dauer- und Zeitfestigkeit |
| M_b | Nm | Mittelspannungsempfindlichkeiten bei Dauer- und Zeitfestigkeit |
| M_E | - | Biegemoment |
| \underline{m}_i | mm | Eigenspannungsempfindlichkeit |
| $m, m_a, m_m,$ m_o | - | Einheitsvektoren der Hauptspannungen |
| m | - | Makrostützziffer allgemein, der Amplitude, der Mittelspannung, der Oberspannung |
| N | - | Parameter der SIH |
| N_D | - | Lastwechselzahl |
| n | - | Ecklastspielzahl |
| n' | - | Mikrostützziffer |
| n' | - | Parameter der SIH |
| $n_{\hat{i}_i}$ | - | zyklischer Verfestigungsexponent |
| | - | Mikrostützziffer der Invariante \hat{I}_i |

| Zeichen | Einheit | Bedeutung |
|---------------|---------|---|
| $n_{G,1a}$ | - | Mikrostützziffer der Invariante \hat{I}_{1a} berechnet nach dem Gradientenkonzept |
| $n_{G,2a}$ | - | Mikrostützziffer der Invariante \hat{I}_{2a} berechnet nach dem Gradientenkonzept |
| $n_{G,12a}$ | - | Mikrostützziffer der Invariante \hat{J}_{12a} berechnet nach dem Gradientenkonzept |
| $n_{G,3a}$ | - | Mikrostützziffer der Invariante \hat{I}_{3a} berechnet nach dem Gradientenkonzept |
| $n_{H,1a}$ | - | Mikrostützziffer der Invariante \hat{I}_{1a} berechnet nach dem Gradientenkonzept aus [21] |
| $n_{H,2a}$ | - | Mikrostützziffer der Invariante \hat{I}_{2a} berechnet nach dem Gradientenkonzept aus [21] |
| $n_{H,3a}$ | - | Mikrostützziffer der Invariante \hat{J}_{3a} berechnet nach der Näherungsbeziehung aus [21] |
| $n_{V,1a}$ | - | Mikrostützziffer der Invariante \hat{I}_{1a}^2 berechnet nach dem Volumenkonzept |
| $n_{V,2a}$ | - | Mikrostützziffer der Invariante \hat{I}_{2a} berechnet nach dem Volumenkonzept |
| $n_{V,12a}$ | - | Mikrostützziffer der Invariante \hat{J}_{12a} berechnet nach dem Volumenkonzept |
| $n_{V,3a}$ | - | Mikrostützziffer der Invariante \hat{I}_{3a} berechnet nach dem Volumenkonzept |
| $n_{G,1o}$ | - | Mikrostützziffer der Invariante \hat{I}_{1o} berechnet nach dem Gradientenkonzept |
| $n_{G,2o}$ | - | Mikrostützziffer der Invariante \hat{I}_{2o} berechnet nach dem Gradientenkonzept |
| $n_{G,3o}$ | - | Mikrostützziffer der Invariante \hat{I}_{3o} berechnet nach dem Gradientenkonzept |
| $n_{H,1o}$ | - | Mikrostützziffer der Invariante \hat{I}_{1o} berechnet nach dem Gradientenkonzept aus [21] |
| $n_{H,2o}$ | - | Mikrostützziffer der Invariante \hat{I}_{2o} berechnet nach dem Gradientenkonzept aus [21] |
| $n_{V,1o}$ | - | Mikrostützziffer der Invariante \hat{I}_{1o}^2 berechnet nach dem Volumenkonzept |
| $n_{V,2o}$ | - | Mikrostützziffer der Invariante \hat{I}_{2o} berechnet nach dem Volumenkonzept |
| $n_{V,3o}$ | - | Mikrostützziffer der Invariante \hat{I}_{3o} berechnet nach dem Volumenkonzept |
| $n_{G,Mises}$ | - | Mikrostützziffer der <i>von Mises</i> -Vergleichsspannung berechnet nach dem Gradientenkonzept |
| $n_{H,Mises}$ | - | Mikrostützziffer der <i>von Mises</i> -Vergleichsspannung berechnet nach dem Gradientenkonzept aus [21] |

| Zeichen | Einheit | Bedeutung |
|---|----------|---|
| $n_{V,mod.Mises}$ | - | Mikrostützziffer der modifizierten <i>von Mises</i> -Vergleichsspannung berechnet nach dem Volumenkonzept |
| $n_{1a,makro},$ $n_{1o,makro},$ $n_{2a,makro},$ $n_{2o,makro}$ | - | invariantenbezogene Stützziffern |
| $\underline{\underline{P}}$ | - | Potentialfaktoren (QVH) |
| \bar{P} | - | Ort der höchsten Beanspruchung |
| P_{SWT} | N/mm^2 | Schadigungsparameter nach <i>Smith, Watson</i> und <i>Topper</i> |
| Q, Q_N | - | Parameter im <i>Haigh</i> -Schaubild bei Dauer- und Zeitfestigkeit |
| R | - | Spannungsverhältnis |
| R_m | N/mm^2 | Zugfestigkeit |
| R_m^*, R_{mN}^* | N/mm^2 | fiktiver Kennwert im <i>Haigh</i> -Schaubild bei Dauer- und Zeitfestigkeit |
| $R_{p0,2}$ | N/mm^2 | 0,2%-Dehngrenze |
| $R'_{p0,2}$ | N/mm^2 | 0,2%-Dehngrenze bei zyklischer Beanspruchung |
| R_{ij} | - | Richtungsfaktoren (QVH) |
| R_z | μm | gemittelte Rauhtiefe |
| r | mm | Kerbradius |
| r, φ, γ | mm | Koordinatenrichtungen |
| $\underline{\underline{S}}, \underline{\underline{S}}^*$ | - | Spannungstensoren im Koordinatensystem x, y, z bzw. in einem beliebig gedrehten Koordinatensystem |
| $\underline{\underline{S}}_o, \underline{\underline{S}}_m, \underline{\underline{S}}_a,$ $\underline{\underline{S}}_e$ | - | Spannungstensor der Ober-, der Mittel-, der Ausschlag- und der Eigenspannung |
| \bar{S}, S_0, T | N/mm^2 | Nennspannung |
| S^* | N/mm^2 | plastische Nennspannung |
| s | - | dimensionsloser Faktor zur Berechnung der Mikrostützziffer nach <i>Neuber</i> |
| s | mm | Laufvariable |
| T | s | Periode |
| t, t^*, t_0 | s | Zeitpunkte |
| t | mm | Tiefe der Nut der Kerbe |
| u | - | Parameter der Näherungsbeziehung von <i>Seeger</i> und <i>Beste</i> |
| V, V_0 | mm^3 | Volumen |
| x, y, z | mm | Koordinatenrichtungen |
| Z_{ij} | - | Zeitfaktoren (QVH) |

| Zeichen | Einheit | Bedeutung |
|--|--------------|---|
| $\bar{\alpha}$ | - | Formbeiwert |
| α_k | - | Kerbformzahl |
| α_{kt} | - | Kerbformzahl für Torsionsbeanspruchung |
| α_{kz} | - | Kerbformzahl für Zugbeanspruchung |
| α_p | - | Grenzlastformzahl |
| $\bar{\beta}$ | - | wirksamer Formbeiwert |
| β_{kz} | - | Kerbwirkungszahl für Zugbeanspruchung |
| Γ | $(N/mm^2)^2$ | Abstandsfunktion |
| γ | - | Winkel einer Schnittebene |
| ΔK_{th0} | $N/mm^{3/2}$ | dauerfest ertragbare Spannungsintensitätsschwingbreite |
| Δr | mm | Koordinatenabschnitt für die Integration |
| $\Delta \alpha_{ij}$ | - | Abkürzungen der wählbaren Konstanten der einzelnen Komponenten des Spannungstensors |
| $\Delta \gamma$ | $^\circ$ | Koordinatenabschnitt für die Integration |
| $\Delta \epsilon$ | - | Dehnungsdifferenz |
| $\Delta \sigma_{ij}$ | N/mm^2 | wählbare Konstanten der einzelnen Komponenten des Spannungstensors |
| $\Delta \varphi$ | $^\circ$ | Koordinatenabschnitt für die Integration |
| δ_{ij} | - | Phasenverschiebungswinkel der einzelnen Komponenten des Spannungstensors |
| $\delta_{ij,\lambda}$ | - | Phasenverschiebungswinkel der einzelnen Komponenten des Spannungstensors für das Frequenzverhältnis λ |
| $\delta_{v,\lambda}$ | - | Phasenverschiebungswinkel der Vergleichsspannungs-Zeitfunktion für jedes Frequenzverhältnis λ |
| ϵ | - | Dehnung |
| ϵ_a | - | Dehnungsamplitude |
| $\epsilon_{a,el}, \epsilon_{a,pl},$ | - | elastische, plastische und zusammengesetzte |
| $\epsilon_{a,ges}$ | - | Dehnungsamplitude |
| ϵ_F | - | Fließdehnung |
| ϵ_f' | - | zyklischer Dehnungskoeffizient |
| $\epsilon_{\text{örtl}}$ | - | örtliche Dehnung |
| ϑ | - | Winkel (QVH) |
| λ | - | Frequenzverhältnis |
| $\Pi, \Pi_{\text{lokal}}, \Pi_{\text{global}}$ | - | Plastifizierungsvermögen allgemein, lokal und global |
| ρ | mm | Kerbradius |
| ρ^* | mm | Ersatzstrukturlänge |
| ρ^* | mm | charakteristische Werkstoffstrukturlänge |
| ρ_{eff}, ρ_{eff}^* | mm | effektive Werkstoffstrukturlänge |
| ρ_{pl} | mm | Tiefe der zyklischen Randplastifizierung |
| $\underline{\sigma}_{ij}$ | - | Spannungsvektor einer Schnittebene |

| Zeichen | Einheit | Bedeutung |
|---------------------------------|----------|---|
| σ | N/mm^2 | Spannungen |
| σ^* | N/mm^2 | fiktive Spannung |
| $\check{\sigma}$ | N/mm^2 | plastische Nennspannung |
| $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ | N/mm^2 | Hauptspannungen |
| σ_A | N/mm^2 | ertragbarer Spannungsausschlag |
| σ_a | N/mm^2 | Spannungsausschlag |
| σ_a^* | N/mm^2 | fiktive Spannungsamplitude |
| $\sigma_{a,NSH}$ | N/mm^2 | Vergleichsspannungs-Amplitude nach der Normalspannungs-Hypothese |
| $\check{\sigma}_{a,NSH}$ | N/mm^2 | Maximum der Ausschlagspannung nach der Normalspannungs-Hypothese |
| $\bar{\sigma}_{a,mod. Mises}$ | N/mm^2 | Maximum der elastisch gestützten modifizierten <i>von Mises</i> -Vergleichsspannungs-Zeitfunktion nach dem Volumenkonzept |
| $\check{\sigma}_{a,mod. Mises}$ | N/mm^2 | unteres Niveau der modifizierten <i>Neuber</i> -Hyperbel berechnet für die Amplituden nach dem Volumenkonzept |
| σ_{bW} | N/mm^2 | Biegegewebselfestigkeit |
| σ_D | N/mm^2 | Spannungsausschlag bei Dauerfestigkeit |
| σ_F | N/mm^2 | Fließspannung |
| σ_f | N/mm^2 | zyklischer Spannungskoeffizient |
| σ_{ij} | N/mm^2 | Spannungskomponenten des Spannungstensors |
| σ_{ija} | N/mm^2 | Ausschlagspannung der einzelnen Komponenten des Spannungstensors |
| $\sigma_{ija,\lambda}$ | N/mm^2 | Ausschlagspannung der einzelnen Komponenten des Spannungstensors für das Frequenzverhältnis λ |
| σ_{ije} | N/mm^2 | Eigenspannungen der einzelnen Komponenten des Spannungstensors |
| σ_{ijm} | N/mm^2 | Mittelspannungen der einzelnen Komponenten des Spannungstensors |
| σ_l | N/mm^2 | Längsspannung |
| σ_m | N/mm^2 | Mittelspannung |
| σ_m^* | N/mm^2 | fiktive Mittelspannung |
| $\sigma_{mod. Mises}$ | N/mm^2 | modifizierte <i>von Mises</i> -Vergleichsspannung |
| $\bar{\sigma}_{mod. Mises}$ | N/mm^2 | Zeitliches Maximum der modifizierten <i>von Mises</i> -Vergleichsspannung |
| $\bar{\sigma}_{H,Mises}$ | N/mm^2 | elastisch gestützte <i>von Mises</i> -Vergleichsspannung nach dem Gradientenkonzept aus [21] |
| $\bar{\sigma}_{o,mod. Mises}$ | N/mm^2 | Maximum der elastisch gestützten modifizierten <i>von Mises</i> -Vergleichsoberspannungs-Zeitfunktion nach dem Volumenkonzept |

| Zeichen | Einheit | Bedeutung |
|--|----------|--|
| $\tilde{\sigma}_{o,\text{mod. Mises}}$ | N/mm^2 | unteres Niveau der modifizierten <i>Neuber</i> -Hyperbel berechnet für die Oberspannung nach dem Volumenkonzept |
| $\bar{\sigma}_{V,\text{mod. Mises}}$ | N/mm^2 | elastisch gestützte modifizierte <i>von Mises</i> -Vergleichsspannung nach dem Volumenkonzept |
| σ_o | N/mm^2 | Oberspannung |
| σ_o^* | N/mm^2 | fiktive Oberspannung |
| $\sigma_{o,NSH}$ | N/mm^2 | Oberspannung nach der Normalspannungs-Hypothese |
| $\tilde{\sigma}_{o,NSH}$ | N/mm^2 | Maximum der Oberspannung nach der Normalspannungs-Hypothese |
| $\sigma_{\text{örtl}}$ | N/mm^2 | örtliche Spannung |
| σ_r | N/mm^2 | Radialspannung |
| σ_{rr} | N/mm^2 | Normalspannungen in r-Richtung |
| $\sigma_{r\gamma}$ | N/mm^2 | Schubspannungen auf der Schnittfläche r in γ -Richtung |
| $\sigma_{r\varphi}$ | N/mm^2 | Schubspannungen auf der Schnittfläche r in φ -Richtung |
| σ_{schw} | N/mm^2 | Zugschwellfestigkeit |
| σ_u | N/mm^2 | Unterspannung |
| σ_u | N/mm^2 | Umfangsspannung |
| $\sigma_v, \sigma_{v,NSH},$ | N/mm^2 | Vergleichsspannung, allgemein und nach der Normalspannungs-, der Schubspannungs- und der <i>von Mises</i> -Hypothese |
| $\sigma_{v,SSH},$ | | |
| $\sigma_{v,MH}$ | | |
| σ_{va} | N/mm^2 | maßgebliche Vergleichsspannungs-Amplitude |
| $\sigma_{G,va}$ | N/mm^2 | maßgebliche Vergleichsspannungs-Amplitude berechnet nach dem Gradientenkonzept |
| $\sigma_{H,va}$ | N/mm^2 | maßgebliche Vergleichsspannungs-Amplitude berechnet nach dem Gradientenkonzept aus [21] |
| $\sigma_{va,MH}$ | N/mm^2 | Vergleichsspannungs-Amplitude nach der <i>von Mises</i> -Hypothese |
| $\sigma_{va,\lambda}$ | N/mm^2 | Vergleichsspannungs-Amplitude für das Frequenzverhältnis λ |
| $\sigma_{G,va,\lambda}$ | N/mm^2 | Vergleichsspannungs-Amplitude für das Frequenzverhältnis λ berechnet nach dem Gradientenkonzept |
| $\sigma_{H,va,\lambda}$ | N/mm^2 | Vergleichsspannungs-Amplitude für das Frequenzverhältnis λ berechnet nach dem Gradientenkonzept aus [21] |
| $\tilde{\sigma}_{va}$ | N/mm^2 | Amplitude der Vergleichsspannungs-Zeitfunktion |
| σ_{vm} | N/mm^2 | Vergleichsmittelspannung |
| $\tilde{\sigma}_{vo,Mises}$ | N/mm^2 | Maximum der <i>von Mises</i> -Vergleichsoberspannung |

| Zeichen | Einheit | Bedeutung |
|---|--------------|---|
| $\sigma_{vo, Mises}$ | N/mm^2 | von Mises-Vergleichsoberspannung |
| σ_W, σ_{WN} | N/mm^2 | Zug-Druck-Wechselfestigkeit bei Dauer- und Zeitfestigkeit |
| $\sigma_{W, 90^\circ},$ $\sigma_{WN, 90^\circ}$ | N/mm^2 | Festigkeitswert |
| $\sigma_{xx}, \sigma_{xx}^*$ | N/mm^2 | Normalspannungen in x - und x^* -Richtung |
| $\sigma_{xy}, \sigma_{xy}^*$ | N/mm^2 | Schubspannungen auf der Schnittfläche x bzw. x^* in y - bzw. y^* -Richtung |
| $\sigma_{xz}, \sigma_{xz}^*$ | N/mm^2 | Schubspannungen auf der Schnittfläche x bzw. x^* in z - bzw. z^* -Richtung |
| $\sigma_{yy}, \sigma_{yy}^*$ | N/mm^2 | Normalspannungen in y - und y^* -Richtung |
| $\sigma_{yz}, \sigma_{yz}^*$ | N/mm^2 | Schubspannungen auf der Schnittfläche y bzw. y^* in z - bzw. z^* -Richtung |
| $\sigma_{zz}, \sigma_{zz}^*$ | N/mm^2 | Normalspannungen in z - und z^* -Richtung |
| $\sigma_{\gamma\gamma}$ | N/mm^2 | Normalspannungen in γ -Richtung |
| $\sigma_{\gamma\varphi}$ | N/mm^2 | Schubspannungen auf der Schnittfläche γ in φ -Richtung |
| $\sigma_{\gamma\varphi a}$ | N/mm^2 | Normalspannungskomponente der Ausschlagspannung in einer um die Winkel φ und γ gedrehten Schnittebene (SIH) |
| $\sigma_{\gamma\varphi m}$ | N/mm^2 | Normalspannungskomponente der Mittelspannung in einer um die Winkel φ und γ gedrehten Schnittebene (SIH) |
| $\sigma_{\varphi\varphi}$ | N/mm^2 | Normalspannungen in φ -Richtung |
| τ | N/mm^2 | Schubspannung |
| τ_{schw} | N/mm^2 | Torsions-Schwellfestigkeit |
| τ_W, τ_{WN} | N/mm^2 | Torsions-Wechselfestigkeit bei Dauer- und Zeitfestigkeit |
| $\tau_{\gamma\varphi, eff, a}$ | N/mm^2 | effektive Schubspannungsamplitude (SIH) |
| $\tau_{\gamma\varphi a}$ | N/mm^2 | resultierende Schubspannungskomponente der Ausschlagspannung in einer um die Winkel φ und γ gedrehten Schnittebene (SIH) |
| $\tau_{\gamma\varphi, \gamma}$ | N/mm^2 | Schubspannungskomponente der Ausschlagspannung in einer um die Winkel φ und γ gedrehten Schnittebene in Richtung γ (SIH) |
| $\tau_{\gamma\varphi, \varphi}$ | N/mm^2 | Schubspannungskomponente der Ausschlagspannung in einer um die Winkel φ und γ gedrehten Schnittebene in Richtung φ (SIH) |
| $\Phi, \overline{\Phi}, \tilde{\Phi}, \hat{\Phi}, \check{\Phi}$ | $(N/mm^2)^2$ | Phasenfunktionen |
| φ | - | Winkel einer Schnittebene |
| $\varphi, \quad \varphi_{lokal},$ | - | Fließbehinderung allgemein, lokal und global |
| φ_{global} | - | |
| $\varphi_{gek}, \varphi_{abg}$ | - | Fließbehinderung eines gekerbten bzw. abgesetzten zugbelasteten Rundstabes |

| Zeichen | Einheit | Bedeutung |
|----------------------|-----------|--|
| φ_a | - | Fließbehinderung, die bei der Berechnung von m_a benutzt wird |
| φ_o | - | Fließbehinderung, die bei der Berechnung von m_o benutzt wird |
| $\varphi_{I_{1a}}$ | - | Resultierender Phasenverschiebungswinkel der 1. Invariante des Spannungstensors |
| $\varphi_{I_{2a}}$ | - | Resultierender Phasenverschiebungswinkel der 2. Invariante des Spannungstensors |
| $\varphi_{I_{2a}}^*$ | - | Resultierender Phasenverschiebungswinkel der 1. und 2. Invariante des Spannungstensors |
| χ | mm^{-1} | bezogenes Anstrengungsgefälle aus der Beanspruchungsart und der Kerbe |
| χ_0 | mm^{-1} | bezogenes Anstrengungsgefälle aus der Beanspruchungsart |
| χ_{I_i} | mm^{-1} | bezogene Invariantengefälle |
| Ω | - | Projektionswinkel (SIH) |
| ω | s^{-1} | Kreisfrequenz |

Literaturverzeichnis

- [1] *Baier, F.-J.*: Zeit- und Dauerfestigkeit bei überlagerter statischer und schwingender Zug-Druck- und Torsionsbeanspruchung, Dissertation TU Stuttgart, 1970
- [2] *Bergmann, J.W.*: Zur Betriebsfestigkeit gekerbter Bauteile auf der Grundlage der örtlichen Beanspruchung. Dissertation TH Darmstadt (1983)
- [3] *Bhonghibhat, Th.*: Festigkeitsverhalten von Stählen unter mehrachsiger phasenverschobener Schwingbeanspruchung mit unterschiedlichen Schwingungsformen und Frequenzen. Techn.-Wiss. Bericht MPA Stuttgart, Heft 86-01 (1986)
- [4] *Buxbaum, O.*: Betriebsfestigkeit. Düsseldorf: Verlag Stahleisen (1986)
- [5] *Coffin, L.F.*: A Study of the Effects of Cyclic Thermal Stresses on a Ductile Metal. Trans. ASME 76 (1954) No. 6, P. 931-950
- [6] *Dietmann, H.*: Festigkeitsberechnung bei mehrachsiger Schwingbeanspruchung. Konstruktion 25 (1973) H. 5, S. 181-189
- [7] *Dietmann, H.*: Einfluß des Spannungszustandes auf das Festigkeitsverhalten gekerbter Zugstäbe aus Stahl. Dissertation TH Stuttgart (1964)
- [8] *Dietmann, H.*: Schwingfestigkeit gekerbter Bauteile. Konstruktion 37 (1987), H.2, S.67-71
- [9] DIN 743: Tragfähigkeitsberechnung von Wellen und Achsen
- [10] *Dittmann, K. J.*: Ein Beitrag zur Festigkeitsberechnung und Lebensdauervorhersage für Bauteile aus Stahl unter mehrachsiger synchroner Beanspruchung. Dissertation TU Berlin (1991)
- [11] Dubbel, Taschenbuch für den Maschinenbau: 19. Auflage. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag 1999
- [12] *El-Magd, E.*: Versagensbedingung bei mehrachsiger schwingender Beanspruchung metallischer Werkstoffe. Habilitation RWTH Aachen (1974)
- [13] *El-Magd, E.*: Dauerfestigkeit bei überlagerter zweiachsiger statischer Beanspruchung. Konstruktion 29 (1977) H. 7, S. 253-257
- [14] Kerbbeanspruchungen II: Mehrachsige Kerbbeanspruchungen im nichtlinearen Bereich bei proportionaler und nichtproportionaler wechselnder Belastung. FKM-Heft 139, Forschungskuratorium Maschinenbau e.V. (1988)

- [15] Lebensdauervorhersage I: Verbesserung der Lebensdauerabschätzung durch systematische Aufarbeitung und Auswertung vorliegender Versuchsreihen. FKM-Heft 189, Forschungskuratorium Maschinenbau e.V. (1994)
- [16] Größeneinfluß: Einfluß der Probengröße auf das Ermüdungsverhalten bauteilähnlicher Kerbproben unter einstufigen und zufälligen Beanspruchungsabläufen. FKM-Heft 192, Forschungskuratorium Maschinenbau e.V. (1995)
- [17] Lebensdauerberechnung für gekerbte Bauteile mit Randschicht und Eigenspannungen. FKM-Heft 193, Forschungskuratorium Maschinenbau e.V. (1995)
- [18] Oberflächenrauigkeit – Untersuchungen zum Einfluß der Oberflächenrauigkeit auf die Ermüdungsfestigkeit. FKM-Heft 196/1995, Vorhaben 156, Forschungskuratorium Maschinenbau e.V. (1995)
- [19] *Hänel, B., E. Haibach, T. Seeger, G. Wirthgen, H. Zenner*: Rechnerischer Festigkeitsnachweis für Maschinenbauteile. 3., vollständig überarbeitete und erweiterte Auflage, VDMA Verlag GmbH, Frankfurt/Main, 1998
- [20] *Gummert, P., K.-A. Reckling*: Mechanik. Braunschweig: Vieweg 1986
- [21] *Hahn, M.*: Festigkeitsberechnung und Lebensdauerabschätzung für metallische Bauteile unter mehrachsiger schwingender Beanspruchung. Dissertation TU Berlin (1995)
- [22] *Haibach, E.*: Betriebsfestigkeit - Verfahren und Daten zur Bauteilberechnung. Düsseldorf: VDI-Verlag 1989
- [23] *Haibach, E., H.P. Lehrke*: Das Verfahren der Amplituden-Transformation zur Lebensdauerberechnung bei Schwingbeanspruchung. Archiv für das Eisenhüttenwesen 47 (1976) Nr. 10, S. 623-628
- [24] *Haibach, E., C. Matschke*: Schwingfestigkeit von Stahl 42CrMo4 bei verschiedenen Formzahlen und Spannungsverhältnissen. Bericht Nr. FB-153 des Fraunhofer-Instituts für Betriebsfestigkeit, Darmstadt 1980
- [25] *Hanschmann, D.*: Ein Beitrag zur rechnergestützten Lebensdauervorhersage schwingbeanspruchter Kraftfahrzeugbauteile aus Aluminiumwerkstoffen. Dissertation RWTH Aachen (1981)
- [26] *Hatanaka, K., Sh. Shimizu, A. Nagae*: Size Effect on Rotating Bending Fatigue in Steels. Bulletin of the JSME, Vol. 26 (1983) No.218, P.1288-1295

- [27] *Heidenreich, R., W. Schütz, I. Richter, H. Zenner*: Schubspannungsintensitätshypothese - Dauerfestigkeit bei mehrachsiger Beanspruchung. Abschlußbericht zum Vorhaben Nr.59,FKM-Heft 105, Forschungskuratorium Maschinenbau (1983)
- [28] *Jaenicke, B.*: Zur Gestaltung geschweißter, einsatzgehärteter Großzahnräder. Dissertation TU-Berlin (1993)
- [29] *Kaniut, C.*: Zur Betriebsfestigkeit metallischer Werkstoffe bei mehrachsiger Beanspruchung. Dissertation RWTH Aachen (1983)
- [30] *Kenmeugne, B., E. Vidal-Salle, J. L. Robert, J. Bahuaud*: On a new multiaxial fatigue criterion based on a selective integration approach. Fatigue '96, Berlin 1996
- [31] *Kenmeugne, B., E. Vidal-Salle, J. L. Robert, J. Bahuaud*: Multiaxial fatigue under variable amplitude loading. Fatigue '96, Berlin 1996
- [32] *Kloos, K.H., B. Kaiser, H. Friedrich*: Gegenüberstellung des Wechselverformungsverhaltens an Rundproben der Durchmesser 8, 16 und 32 mm bei Axial- und Umlaufbiegebeanspruchung. Vortrag FKM-Sitzung am 18.Feb.1994 in Frankfurt
- [33] *Landgraf, R.W., J.D. Morrow, T. Endo*: Determination of the Cyclic Stress-Strain Curve. Journal of Materials 4 (1969) Nr. 1, P. 176-188
- [34] *Liebrich, M.*: Kerbempfindlichkeit von Stählen im Gebiet der Zeitfestigkeit, Tech.-wiss. Bericht MPA, Heft 68-05, Stuttgart 1968
- [35] *Liu, J.*: Beitrag zur Verbesserung der Dauerfestigkeitsberechnung bei mehrachsiger Beanspruchung. Dissertation TU Clausthal (1991)
- [36] *Ludwik, P.*: Streckgrenze, Kalt- und Warmsprödigkeit. Z. VDI 70 (1926), S.379-386
- [37] *Lukáš, P., M. Klesnil*: Fatigue Limit of Notched Bodies. Materials Science and Engineering 34 (1978), P.61-66
- [38] *Manson, S.S.*: Fatigue - A Complex Subject - Some Simple Approximations. Experimental Mechanics 5 (1965) No. 7, P. 193-226
- [39] *Mertens, H.*: Kerbgrund- und Nennspannungskonzepte zur Dauerfestigkeitsberechnung - Weiterentwicklung des Konzepts der Richtlinie VDI 2226. In: VDI-Berichte Nr. 661 Dauerfestigkeit und Zeitfestigkeit - zeitgemäße Berechnungskonzepte. S.1-25, Düsseldorf: VDI-Verlag 1988

- [40] *Mertens, H.*: Vorschlag zur Festigkeitsberechnung stabförmiger Bauteile für den Konstruktionsentwurf mit Beispielrechnungen für Stahlbauteile. In: VDI-Berichte Nr. 661 Dauerfestigkeit und Zeitfestigkeit - zeitgemäße Berechnungskonzepte. S.247-275, Düsseldorf: VDI-Verlag 1988
- [41] *Mertens, H.*: Zur Formulierung von Festigkeitshypothesen für mehrachsige phasenverschobene Schwingbeanspruchungen. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik 70 H.4, S.T327-T329, (1990)
- [42] *Mertens, H., M. Hahn*: Vergleichsspannungshypothese zur Schwingfestigkeit bei zweiachsiger Beanspruchung ohne und mit Phasenverschiebungen. Konstruktion 45 (1993) H. 6, S. 196-202
- [43] *Mertens, H., A. Linke*: Zur Sicherheit und Genauigkeit von Festigkeitsnachweisen — Ein Vergleich verschiedener Berechnungskonzepte. Konstruktion (2001), demnächst.
- [44] *Mielke, S.*: Festigkeitsverhalten metallischer Werkstoffe unter zweiachsig schwingender Beanspruchung mit verschiedenen Spannungszeitverläufen. Dissertation RWTH Aachen (1980)
- [45] *Morrow, J.D.*: Cyclic Plastic Strain Energy and Fatigue of Metals. ASTM STP 378, American Society of Testing and Materials (1965), P. 45-87
- [46] *Natke, H.G.*: Einführung in die Theorie und Praxis der Zeitreihen- und Modalanalyse. 3. Auflage, Braunschweig: Vieweg 1992
- [47] *Neuber, H.*: Über die Berücksichtigung der Spannungskonzentration bei Festigkeitsberechnungen. Konstruktion 20 (1968), H.7, S.245-251
- [48] *Neuber, H.*: Kerbspannungslehre, 3. Auflage. Berlin: Springer 1985
- [49] *Novozhilov, V.V.*: Theory of Elasticity. Oxford: Pergamon Press 1961
- [50] *Pötter, K., H. Zenner*: Betriebsfestigkeitsversuche an gekerbten Probestäben aus 42CrMo4 bei mehrachsiger Beanspruchung (Biegung und Torsion). Interner Bericht, Institut für Maschinelle Anlagentechnik und Betriebsfestigkeit, TU Clausthal, 1996, entnommen FKM-Heft 221-2, 1997
- [51] *Rainer, G.*: Kerbwirkung an gekerbten und abgesetzten Flach- und Rundstäben. Dissertation TH Darmstadt (1978)
- [52] *Ramberg, W., W.R. Osgood*: Description of Stress-Strain Curves by Three Parameters. Technical Note No. 902, NACA, 1943

- [53] *Schütz, W.*: Über eine Beziehung zwischen der Lebensdauer bei konstanter und bei veränderlicher Beanspruchungsamplitude und ihre Anwendbarkeit auf die Bemessung von Flugzeugbauteilen. Dissertation TH München (1965)
- [54] *Schwalbe, K.-H.*: Bruchmechanik metallischer Werkstoffe. München: Carl Hanser 1970
- [55] *Seeger, T., A. Beste*: Zur Weiterentwicklung von Näherungsformeln für die Berechnung im elastisch-plastischen Bereich. Fortschritt-Berichte VDI-Zeitschrift, Reihe 18, Nr. 2, 1977
- [56] *Siebel, E., M. Gaier*: Untersuchungen über den Einfluß der Oberflächenbeschaffenheit auf die Dauerschwingfestigkeit metallischer Bauteile. VDI-Z 98, S.1751-1774 (1956)
- [57] *Simburger, A.*: Festigkeitsverhalten zäher Werkstoffe bei einer mehrachsigen, phasenverschobenen Schwingbeanspruchung mit körperfesten und veränderlichen Hauptspannungsrichtungen. Dissertation TH Darmstadt (1975)
- [58] *Siebel, E., M. Stieler*: Ungleichförmige Spannungsverteilung bei schwingender Beanspruchung. VDI-Z 97 (1995) Nr. 5, S.121-126
- [59] *Smith, K.N., P. Watson, T.H. Topper*: A Stress-Strain Function for the Fatigue of Metals. Journal of Materials 5 (1970), H. 4, P. 767-778
- [60] *Sonsino, C.M.*: Einfluß von last- und verformungsgesteuerten mehrachsigen Beanspruchungen auf die Anrißlebensdauer, Mat.-wiss. und Werkstofftech. 26, S.425-441, (1995)
- [61] TGL 19340: Dauerfestigkeit der Maschinenbauteile, Teil 01 bis 03. Amt für Standardisierung, Meßwesen und Warenprüfung, Ausgabe März 1983
- [62] *Troost, A., E. El-Magd*: Allgemeine Formulierung der Schwingfestigkeitsamplitude in Haighscher Darstellung. Materialprüfung 17 (1975) Nr. 2, S. 47-49
- [63] *Troost, A., E. El-Magd*: Anisotropes Ermüdungsverhalten isotroper Werkstoffe. Metall 28 (1974), H.1, S.49-55
- [64] *Troost, A., O. Akin, F. Klubberg*: Versuchs- und Rechendaten zur Dauerschwingfestigkeit von metallischen Werkstoffen unter mehrachsiger Beanspruchung. Mat.-wiss. u. Werkstofftech. 23 (1992) H.1, S.1-12

- [65] *Hück, M., L. Thraier, W. Schütz*: VDEh-Bericht ABF 11: Berechnung von Wöhlerlinien für Bauteile aus Stahl, Stahlguß und Grauguß — Synthetische Wöhlerlinien, 2. Fassung. Düsseldorf, Verein Deutscher Eisenhüttenleute (VDEh), Arbeitsgemeinschaft Betriebsfestigkeit 1981
- [66] VDI-Richtlinie 2226: Empfehlung für die Festigkeitsberechnung metallischer Bauteile. Verein Deutscher Ingenieure, Ausgabe Juli 1965
- [67] *Wellinger, K., H. Dietmann*: Festigkeitsberechnung — Grundlagen und technische Anwendung. 2. Auflage. Stuttgart: Alfred Kröner Verlag 1969
- [68] *Wohlfahrt, H., E. Macherauch*: Eigenspannungen und Ermüdung. In W. Dahl (Hrsg.): Ermüdungsverhalten metallischer Werkstoffe. Oberursel: DGM Informationsgesellschaft 1985, S.237-283
- [69] *Zenner, H., I. Richter*: Eine Festigkeitshypothese für die Dauerfestigkeit bei beliebigen Beanspruchungskombinationen. Konstruktion 29 (1977) H.1, S.11-28
- [70] *Zenner, H., J. Liu*: Anmerkungen zur Verifizierung von Festigkeitshypothesen. Institutsmitteilung vom 08.08.1994

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurden folgende unveröffentlichte Studien- und Diplomarbeiten betreut, deren Ergebnisse zum Teil ebenfalls eingeflossen sind:

- Stahr, S.: Automatisierte Bestimmung elastischer Kenngrößen für die Festigkeitsberechnung mit Hilfe der Finiten-Elemente-Methode (1997).
- Linke, A.: Bestimmung invarianter Kenngrößen zur Vorhersage der Lebensdauer von Bauteilen aus linearen FEM-Berechnungen (1998).

LEBENS LAUF

Christian Andreas Mourier

| | |
|-----------------------|--|
| geboren am: | 24. März 1964 in Hamburg verheiratet, vier Kinder |
| Sep. 1970 - Juli 1974 | Grundschule in Hamburg |
| Aug. 1974 - Juni 1983 | Wilhelm-Gymnasium in Hamburg |
| Juni 1983 - Sep. 1984 | Grundwehrdienst |
| Jan. 1985 - Jan. 1987 | Ausbildung zum Industriekaufmann, Daimler-Benz AG Niederlassung Hamburg |
| Okt. 1987 - Jan. 1995 | Studium des Maschinenbaus, Studienrichtung Konstruktionstechnik an der TU Berlin, Abschluß als Diplom-Ingenieur |
| Feb. 1995 - Juni 1997 | Wissenschaftlicher Mitarbeiter an der TU Berlin, Institut für Maschinenkonstruktion Fachgebiet Konstruktionslehre, Prof. Dr.-Ing. H. Mertens |
| Nov. 1997 - Sep. 2001 | Projektingenieur bei der MAN Turbomaschinen AG GHH BORSIG, Berlin |
| seit Okt. 2001 | Leiter Konstruktion Kompressoren Berlin bei der MAN Turbomaschinen AG GHH BORSIG |